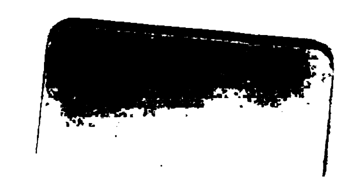






FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.



GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre 2. T. 2. Abt.

Einleitung.

Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundthatsachen. Diese Grundthatsachen heissen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit *Euklid* in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Litteratur[1]) sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

1) Man vergleiche die zusammenfassenden und erläuternden Berichte von *G. Veronese*, „Grundzüge der Geometrie“, deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1894 (Anhang), und *F. Klein*, „Zur ersten Verteilung des *Lobatschefskiy*-Preises“, Math. Ann. Bd. 50.

Kapitel I.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heissen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heissen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „congruent", „stetig"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie.*

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundthatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I 1—7. Axiome der *Verknüpfung*,
II 1—5. Axiome der *Anordnung*,
III. Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom),
IV 1—6. Axiome der *Congruenz*,
V. Axiom der *Stetigkeit* (*Archimedisches* Axiom).

§ 2.

Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.

Die Axiome dieser Gruppe stellen zwischen den oben erklärten Begriffen Punkte, Geraden und Ebenen eine *Verknüpfung* her und lauten wie folgt:

I 1. *Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a; wir setzen $AB = a$ oder $BA = a$.*

Statt „bestimmen“ werden wir auch andere Wendungen brauchen, z. B. A „liegt auf“ a, A „ist ein Punkt von“ a, a „geht durch“ A „und durch“ B, a „verbindet“ A „und“ oder „mit“ B u. s. w. Wenn A auf a und ausserdem auf einer anderen Geraden b liegt, so gebrauchen wir auch die Wendung: „die Geraden“ a „und“ b „haben den Punkt A gemein“ u. s. w.

I 2. *Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade; d. h. wenn $AB = a$ und $AC = a$, und $B \neq C$, so ist auch $BC = a$.*

I 3. *Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α; wir setzen $ABC = \alpha$.*

Wir gebrauchen auch die Wendungen: A, B, C „liegen in“ α; A, B, C „sind Punkte von“ α u. s. w.

I 4. *Irgend drei Punkte A, B, C einer Ebene α, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene α.*

I 5. *Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in α.*

In diesem Falle sagen wir: die Gerade a liegt in der Ebene α u. s. w.

I 6. *Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.*

I 7. *Auf jeder Geraden giebt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und im Raum giebt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

Die Axiome I 1—2 enthalten nur Aussagen über die Punkte und Geraden, d. h. über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die *ebenen Axiome der Gruppe* I heissen, zum Unterschied von den Axiomen I 3—7, die ich kurz als die *räumlichen Axiome* bezeichne.

Von den Sätzen, die aus den Axiomen I 1—7 folgen, erwähne ich nur diese beiden:

Satz 1. Zwei Geraden [einer Ebene] haben einen oder keinen Punkt gemein; zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein; eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben keinen oder einen Punkt gemein.

Satz 2. Durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt, so wie auch durch zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt giebt es stets eine und nur eine Ebene.

§ 3.

Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung [1]).

Die Axiome dieser Gruppe definiren den Begriff „zwischen" und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „*zwischen*" dient.

A B C

Fig. 1.

II 1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

A B C D

Fig. 2.

II 2. *Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so giebt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.*

II 3. *Unter irgend drei Punkten einer Geraden giebt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.*

II 4. *Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Geraden können stets so angeordnet werden, dass B zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner C zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt.*

Definition. Das System zweier Punkte A und B, die auf einer Geraden a liegen, nennen wir eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder BA. Die Punkte zwischen A und B heissen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke AB ge-

1) Diese Axiome hat zuerst *M. Pasch* in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, ausführlich untersucht. Insbesondere rührt das Axiom II 5 von *M. Pasch* her.

legen; alle übrigen Punkte der Geraden a heissen *ausserhalb* der Strecke AB gelegen. Die Punkte A, B heissen *Endpunkte* der Strecke AB.

II 5. *Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt innerhalb der Strecke AB geht, so geht sie stets entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.*

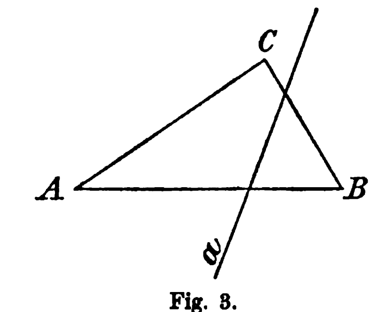


Fig. 3.

Die Axiome II 1—4 enthalten nur Aussagen über die Punkte auf einer Geraden und mögen daher die *linearen Axiome der Gruppe* II heissen; das Axiom II 5 enthält eine Aussage über die Elemente der ebenen Geometrie und heisse daher das *ebene Axiom der Gruppe* II.

§ 4.

Folgerungen aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung.

Zunächst leiten wir aus den linearen Axiomen II 1—4 ohne Mühe folgende Sätze ab:

Satz 3. Zwischen irgend zwei Punkten einer Geraden giebt es stets unbegrenzt viele Punkte.

Satz 4. Sind irgend eine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in einer Reihe $A, B, C, D, E, \ldots, K$ anordnen, sodass B zwischen A einerseits

A B C D E K

Fig. 4.

und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits u. s. w. liegt. Ausser dieser Anordnung giebt es nur noch die umgekehrte Anordnung $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist.

Satz 5. Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt, trennt die übrigen Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete, von folgender

Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des anderen Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' ein und desselben Gebietes eine Strecke AA', welche keinen Punkt von a enthält.

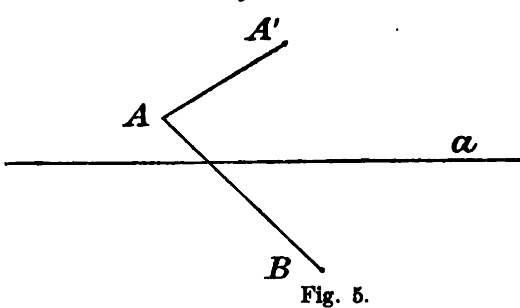


Fig. 5.

Erklärung. Es seien A, A', O, B vier Punkte einer Geraden a, so dass O zwischen A und B, aber nicht zwischen A und A' liegt; dann sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Geraden a auf ein und derselben Seite vom Punkte O*, und die Punkte A, B liegen *in der Geraden a auf verschiedenen Seiten vom Punkte O*. Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heissen auch ein von O ausgehender *Halbstrahl*; somit trennt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen.

Fig. 6.

Indem wir die Bezeichnungen des Satzes 5 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Ebene α auf ein und derselben Seite von der Geraden a* und die Punkte A, B liegen *in der Ebene α auf verschiedenen Seiten von der Geraden a*.

Definition. Ein System von Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KL$ heisst ein *Streckenzug*, der die Punkte A und L miteinander verbindet; dieser Streckenzug wird auch kurz mit $ABCD \ldots KL$ bezeichnet. Die Punkte innerhalb der Strecken $AB, BC, CD, \ldots KL$, sowie die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K, L$ heissen insgesamt die *Punkte des Streckenzuges*. Fällt insbesondere der Punkt L mit dem Punkt A zusammen, so wird der Streckenzug ein *Polygon* genannt und als Polygon $ABCD \ldots K$ bezeichnet. Die Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KA$ heissen auch die *Seiten des Polygons*. Die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K$ heissen die *Ecken des Polygons*. Polygone mit $3, 4, \ldots, n$ Ecken heissen bez. *Dreiecke*, *Vierecke*, ..., *n-Ecke*.

Wenn die Ecken eines Polygons sämtlich von einander verschieden sind und keine Ecke des Polygons in eine Seite fällt und endlich irgend zwei Seiten eines Polygons keinen Punkt mit einander gemein haben, so heisst das Polygon *einfach*.

Mit Zuhülfenahme des Satzes 5 gelangen wir jetzt ohne erhebliche Schwierigkeit zu folgenden Sätzen:

Satz 6. Ein jedes einfache Polygon, dessen Ecken sämtlich in einer Ebene α liegen, trennt die Punkte dieser Ebene α, die nicht dem Streckenzuge des Polygons angehören, in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Aeusseres, von folgender Beschaffenheit: ist A ein Punkt des Inneren (innerer Punkt) und B ein Punkt des Aeusseren (äusserer Punkt), so hat jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, mindestens einen Punkt mit dem Polygon gemein; sind dagegen A, A' zwei Punkte des Inneren und B, B' zwei Punkte des Aeusseren, so giebt es stets Streckenzüge, die A mit A' und B mit B' verbinden und keinen Punkt mit dem Polygon gemein haben. Es giebt Gerade in α, die ganz im Aeusseren des Polygons verlaufen, dagegen keine solche Gerade, die ganz im Inneren des Polygons verläuft.

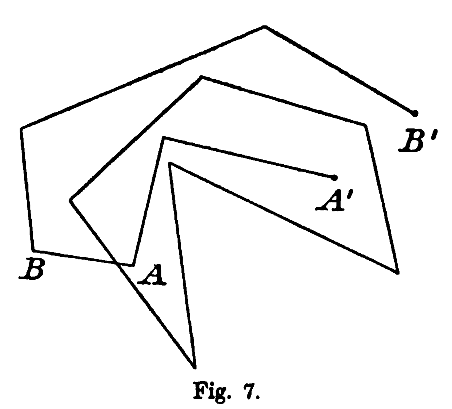


Fig. 7.

Satz 7. Jede Ebene α trennt die übrigen Punkte des Raumes in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des andern Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt von α liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' eines und desselben Gebietes stets eine Strecke AA', die keinen Punkt von α enthält.

Erklärung. Indem wir die Bezeichnungen dieses Satzes 7 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen im Raume *auf ein und derselben Seite von der Ebene* α und die Punkte A, B liegen im Raume *auf verschiedenen Seiten von der Ebene* α.

Der Satz 7 bringt die wichtigsten Thatsachen betreffs der Anordnung der Elemente im Raume zum Ausdruck; diese Thatsachen sind daher lediglich Folgerungen aus den bisher behandelten Axiomen und es bedurfte in der Gruppe II keines neuen räumlichen Axioms.

§ 5.

Die Axiomgruppe III: Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom).

Die Einführung dieses Axioms vereinfacht die Grundlagen und erleichtert den Aufbau der Geometrie in erheblichem Masse; wir sprechen dasselbe wie folgt aus:

III. *In einer Ebene α lässt sich durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu a durch den Punkt A.*

Diese Fassung des Parallelenaxioms enthält zwei Aussagen; nach der ersteren giebt es in der Ebene α durch A stets eine Gerade, die a nicht trifft, und zweitens wird ausgesprochen, dass keine andere solche Gerade möglich ist.

Die zweite Aussage unseres Axioms ist die wesentliche; sie nimmt auch folgende Fassung an:

Satz 8. Wenn zwei Geraden a, b in einer Ebene eine dritte Gerade c derselben Ebene nicht treffen, so treffen sie sich auch einander nicht.

In der That hätten a, b einen Punkt A gemein, so würden durch A in derselben Ebene die beiden Geraden a, b möglich sein, die c nicht treffen; dieser Umstand widerspräche der zweiten Aussage des Parallelenaxioms in unserer ursprünglichen Fassung. Auch folgt umgekehrt aus Satz 8 die zweite Aussage des Parallelenaxioms in unserer ursprünglichen Fassung.

Das Parallelenaxiom III ist ein *ebenes Axiom.*

§ 6.

Die Axiomgruppe IV: Axiome der Congruenz.

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Congruenz oder der Bewegung.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„congruent“* dient.

IV 1. *Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ congruent ist, in Zeichen:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets:

$$AB \equiv AB.$$

Wir sagen auch kürzer, dass eine jede Strecke auf einer gegebenen Seite einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte in eindeutig bestimmter Weise *abgetragen* werden kann.

IV 2. *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ congruent, d. h.: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.*

IV 3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken*

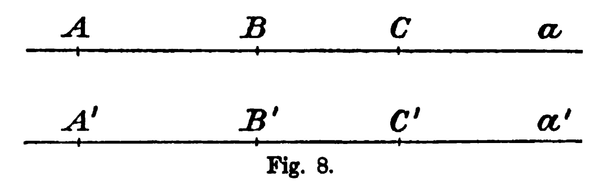


Fig. 8.

auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

Definition. Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder $\sphericalangle(k, h)$. Aus den Axiomen II 1—5 kann leicht geschlossen werden, dass die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkt O die übrigen Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so giebt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heisse das *Innere* des Winkels (h, k) zum Unterschiede von dem anderen Gebiete, welches das *Aeussere* des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heissen *Schenkel* des Winkels und der Punkt O heisst der *Scheitel* des Winkels.

IV 4. *Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann giebt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so dass der Winkel (h, k) (oder (k, h)) congruent*

dem Winkel (h', k') *ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels* (h', k') *auf der gegebenen Seite von* a' *liegen, in Zeichen:*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k).$$

Wir sagen auch kurz, dass ein jeder Winkel in einer gegebenen Ebene nach einer gegebenen Seite an einen gegebenen Halbstrahl auf eine eindeutig bestimmte Weise *abgetragen* werden kann.

IV 5. *Wenn ein Winkel* (h, k) *sowohl dem Winkel* (h', k') *als auch dem Winkel* (h'', k'') *congruent ist, so ist auch der Winkel* (h', k') *dem Winkel* (h'', k'') *congruent, d. h. wenn* $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ *und* $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ *ist, so ist auch stets* $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$.

Erklärung. Es sei ein Dreieck ABC vorgelegt; wir bezeichnen die beiden von A ausgehenden durch B und C laufenden Halbstrahlen mit h bez. k. Der Winkel (h, k) heisst dann der von den Seiten AB und AC eingeschlossene oder der der Seite BC gegenüberliegende Winkel des Dreieckes ABC; er enthält in seinem Inneren sämtliche innere Punkte des Dreieckes ABC und wird mit $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle A$ bezeichnet.

IV 6. *Wenn für zwei Dreiecke* ABC *und* $A'B'C'$ *die Congruenzen*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind auch stets die Congruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ und } \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

Die Axiome IV 1—3 enthalten nur Aussagen über die Congruenz von Strecken auf Geraden; sie mögen daher die *linearen* Axiome der Gruppe IV heissen. Die Axiome IV 4, 5 enthalten Aussagen über die Congruenz von Winkeln. Das Axiom IV 6 knüpft das Band zwischen den Begriffen der Congruenz von Strecken und von Winkeln. Die Axiome IV 3—6 enthalten Aussagen über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die *ebenen* Axiome der Gruppe IV heissen.

§ 7.

Folgerungen aus den Axiomen der Congruenz.

Erklärung. Es sei die Strecke AB congruent der Strecke $A'B'$. Da nach Axiom IV 1 auch die Strecke AB congruent AB

ist, so folgt aus Axiom IV 2 $A'B'$ congruent AB; wir sagen: die beiden Strecken AB und $A'B'$ sind *unter einander congruent.*

Erklärung. Sind $A, B, C, D, \ldots, K, L$ auf a und $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ auf a' zwei Reihen von Punkten, so dass die sämtlichen entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C', \ldots$, KL und $K'L'$ bez. einander congruent sind, so heissen die beiden Reihen von Punkten *unter einander congruent*; A und A', B und $B', \ldots, L$ und L' heissen die *entsprechenden Punkte* der congruenten Punktreihen.

Aus den linearen Axiomen IV 1—3 schliessen wir leicht folgende Sätze:

Satz 9. Ist von zwei congruenten Punktreihen $A, B, \ldots, K, L$ und $A', B', \ldots, K', L'$ die erste so geordnet, dass B zwischen A einerseits und $C, D, \ldots, K, L$ andererseits, C zwischen A, B einerseits und $D, \ldots, K, L$ andererseits, u. s. w. liegt, so sind die Punkte $A', B', \ldots, K', L'$ auf die gleiche Weise geordnet, d. h. B' liegt zwischen A' einerseits und $C', D', \ldots, K', L'$ andererseits, C' zwischen A', B' einerseits und $D', \ldots, K', L'$ andererseits u. s. w.

Erklärung. Es sei Winkel (h, k) congruent dem Winkel (h', k'). Da nach Axiom IV 4 der Winkel (h, k) congruent $\sphericalangle(h, k)$ ist, so folgt aus Axiom IV 5, dass $\sphericalangle(h', k')$ congruent $\sphericalangle(h, k)$ ist; wir sagen: die beiden Winkel (h, k) und (h', k') sind *unter einander congruent.*

Definition. Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren nicht gemeinsame Schenkel eine gerade Linie bilden, heissen *Nebenwinkel.* Zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel, deren Schenkel je eine Gerade bilden, heissen *Scheitelwinkel.* Ein Winkel, welcher einem seiner Nebenwinkel congruent ist, heisst ein *rechter Winkel.*

Erklärung. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heissen einander *congruent,* wenn sämtliche Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$
$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt sind.

Satz 10 (Erster Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

gelten, so sind die beiden Dreiecke einander congruent.

Beweis. Nach Axiom IV 6 sind die Congruenzen

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \text{ und } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt und es bedarf somit nur des Nachweises, dass die Seiten BC und $B'C'$ einander congruent sind. Nehmen wir nun im Gegenteil an, es wäre etwa BC nicht congruent $B'C'$ und bestimmen

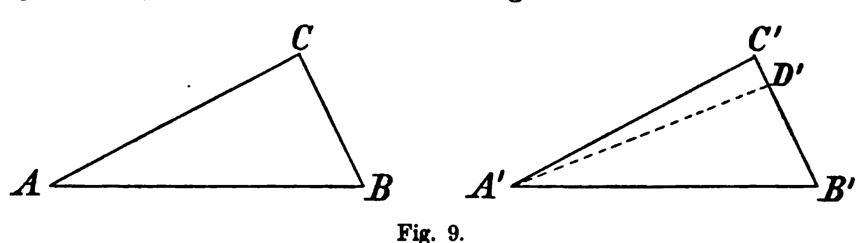


Fig. 9.

auf $B'C'$ den Punkt D', so dass $BC \equiv B'D'$ wird, so stimmen die beiden Dreiecke ABC und $A'B'D'$ in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein; nach Axiom IV 6 sind mithin insbesondere die beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander congruent. Nach Axiom IV 5 müssten mithin auch die beiden Winkel $\sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander congruent ausfallen; dies ist nicht möglich, da nach Axiom IV 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann. Damit ist der Beweis für Satz 10 vollständig erbracht.

Ebenso leicht beweisen wir die weitere Thatsache:

Satz 11 (Zweiter Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken je eine Seite und die beiden anliegenden Winkel congruent ausfallen, so sind die Dreiecke stets congruent.

Wir sind nunmehr im Stande, die folgenden wichtigen Thatsachen zu beweisen:

Satz 12. *Wenn zwei Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ einander congruent sind, so sind auch ihre Nebenwinkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$ einander congruent.*

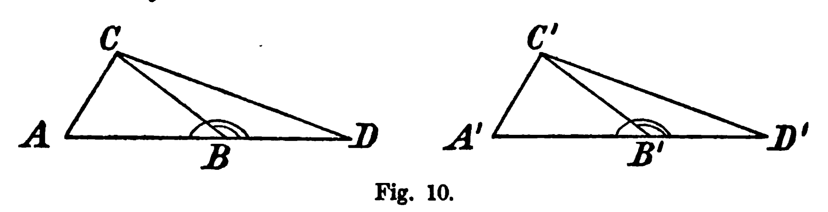


Fig. 10.

Beweis. Wir wählen die Punkte A', C', D' auf den durch B' gehenden Schenkeln derart, dass

$$A'B' \equiv AB, \quad C'B' \equiv CB, \quad D'B' \equiv DB$$

wird. In den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sind dann die Seiten AB und CB bez. den Seiten $A'B'$ und $C'B'$ congruent und, da überdies die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel nach Voraussetzung einander congruent sein sollen, so folgt nach Satz 10 die Congruenz jener Dreiecke, d. h. es gelten die Congruenzen

$$AC \equiv A'C' \text{ und } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'.$$

Da andererseits nach Axiom IV 3 die Strecken AD und $A'D'$ einander congruent sind, so folgt wiederum aus Satz 10 die Congruenz der Dreiecke CAD und $C'A'D'$, d. h. es gelten die Congruenzen

$$CD \equiv C'D' \text{ und } \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle A'D'C'$$

und hieraus folgt mittels Betrachtung der Dreiecke BCD und $B'C'D'$ nach Axiom IV 6 die Congruenz der Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 12 ist der Satz von der Congruenz der Scheitelwinkel.

Satz 13. Es sei der Winkel (h, k) in der Ebene α dem Winkel (h', k') in der Ebene α' congruent und ferner sei l ein Halbstrahl der Ebene α, der vom Scheitel des Winkels (h, k) ausgeht und im Inneren dieses Winkels verläuft: dann giebt es stets einen Halbstrahl l' in der Ebene α', der vom Scheitel des Winkels

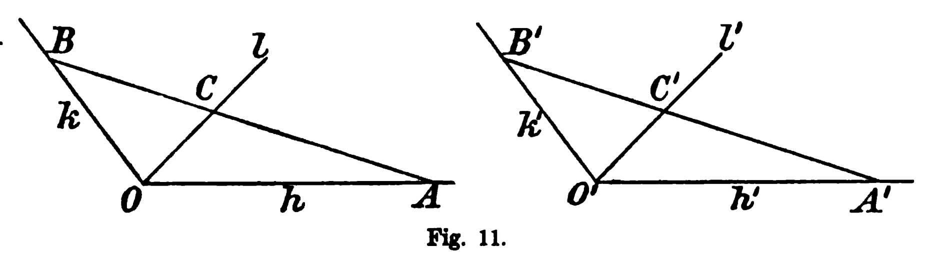


Fig. 11.

(h', k') ausgeht, und im Inneren dieses Winkels (h', k') verläuft, so dass

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \text{ und } \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

wird.

Beweis. Wir bezeichnen die Scheitel der Winkel (h, k) und (h', k') bez. mit O, O' und bestimmen dann auf den Schenkeln h, k, h', k' die Punkte A, B, A', B' derart, dass die Congruenzen

$$OA \equiv O'A' \text{ und } OB \equiv O'B'$$

erfüllt sind. Wegen der Congruenz der Dreiecke OAB und $O'A'B'$ wird

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B', \quad \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A'.$$

Die Gerade AB schneide l in C; bestimmen wir dann auf der Strecke $A'B'$ den Punkt C', so dass $A'C' \equiv AC$ wird, so ist $O'C'$ der gesuchte Halbstrahl l'. In der That, aus $AC \equiv A'C'$ und $AB \equiv A'B'$ kann mittelst Axiom IV 3 leicht die Congruenz $BC \equiv B'C'$ geschlossen werden; nunmehr erweisen sich die Dreiecke OAC und $O'A'C'$, sowie ferner die Dreiecke OBC und $O'B'C'$ unter einander congruent; hieraus ergeben sich die Behauptungen des Satzes 13.

Auf ähnliche Art gelangen wir zu folgender Thatsache:

Satz 14. Es seien einerseits h, k, l und andererseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende und je in einer Ebene gelegene Halbstrahlen: wenn dann die Congruenzen

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \text{ und } \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

erfüllt sind, so ist stets auch

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Auf Grund der Sätze 12 und 13 gelingt der Nachweis des folgenden einfachen Satzes, den *Euklid* — meiner Meinung nach mit Unrecht — unter die Axiome gestellt hat:

Satz 15. *Alle rechten Winkel sind einander congruent.*

Beweis: Der Winkel BAD sei seinem Nebenwinkel CAD congruent und desgleichen sei der Winkel $B'A'D'$ seinem Nebenwinkel $C'A'D'$ congruent; es sind dann $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle C'A'D'$ sämtlich rechte Winkel. Wir nehmen im Gegensatz zu unserer Behauptung an, es wäre der rechte Winkel $B'A'D'$ nicht congruent dem rechten Winkel BAD und tragen dann $\sphericalangle B'A'D'$

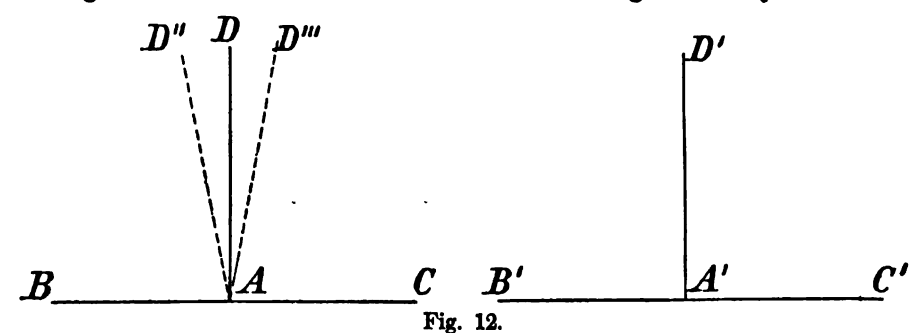


Fig. 12.

an den Halbstrahl AB an, so dass der entstehende Schenkel AD'' entweder in das Innere des Winkels BAD oder des Winkels CAD

fällt; es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu. Wegen der Congruenz der Winkel $B'A'D'$ und BAD'' folgt nach Satz 12, dass auch der Winkel $C'A'D'$ dem Winkel CAD'' congruent ist, und da die Winkel $B'A'D'$ und $C'A'D'$ einander congruent sein sollen, so lehrt Axiom IV 5, dass auch der Winkel BAD'' dem Winkel CAD'' congruent sein muss. Da ferner $\sphericalangle BAD$ congruent $\sphericalangle CAD$ ist, so können wir nach Satz 13 innerhalb des Winkels CAD einen von A ausgehenden Halbstrahl AD''' finden, so dass $\sphericalangle BAD''$ congruent $\sphericalangle CAD'''$ und zugleich $\sphericalangle DAD''$ congruent $\sphericalangle DAD'''$ wird. Nun war aber $\sphericalangle BAD''$ congruent $\sphericalangle CAD''$ und somit müsste nach Axiom IV 5 auch $\sphericalangle CAD''$ congruent $\sphericalangle CAD'''$ sein; das ist nicht möglich, weil nach Axiom IV 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann; hiermit ist der Beweis für Satz 15 erbracht.

Wir können jetzt die Bezeichnungen *„spitzer Winkel“* und *„stumpfer Winkel“* in bekannter Weise einführen.

Der Satz von der Congruenz der Basiswinkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ im gleichschenkligen Dreiecke ABC folgt unmittelbar durch Anwendung des Axioms IV 6 auf Dreieck ABC und Dreieck BAC. Mit Hülfe dieses Satzes und unter Hinzuziehung des Satzes 14 beweisen wir dann leicht in bekannter Weise die folgende Thatsache:

Satz 16 (Dritter Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten entsprechend congruent ausfallen, so sind die Dreiecke congruent.

Erklärung. Irgend eine endliche Anzahl von Punkten heisst eine *Figur*; liegen alle Punkte der Figur in einer Ebene, so heisst sie eine *ebene Figur*.

Zwei Figuren heissen *congruent*, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, dass die auf diese Weise einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander congruent sind.

Congruente Figuren haben, wie man aus den Sätzen 12 und 9 erkennt, folgende Eigenschaften: Drei Punkte einer Geraden liegen auch in jeder congruenten Figur auf einer Geraden. Die Anordnung der Punkte in entsprechenden Ebenen in Bezug auf entsprechende Gerade ist in congruenten Figuren die nämliche; das Gleiche gilt von der Reihenfolge entsprechender Punkte in entsprechenden Geraden.

Der allgemeinste Congruenzsatz für die Ebene und für den Raum drückt sich, wie folgt, aus:

Satz 17. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ congruente ebene Figuren sind und P einen Punkt in der Ebene der ersten bedeutet, so lässt sich in der Ebene der zweiten Figur stets ein Punkt P' finden derart, dass $(A, B, C, \ldots, P)$ und $(A', B', C', \ldots, P')$ wieder congruente Figuren sind. Enthalten die beiden Figuren wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte, so ist die Construction von P' nur auf eine Weise möglich.

Satz 18. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ congruente Figuren sind und P einen beliebigen Punkt bedeutet, so lässt sich stets ein Punkt P' finden, so dass die Figuren $(A, B, C, \ldots, P)$ und $(A', B', C', \ldots, P')$ congruent sind. Enthält die Figur $(A, B, C \ldots)$ mindestens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte, so ist die Construction von P' nur auf eine Weise möglich.

Dieser Satz enthält das wichtige Resultat, dass die sämtlichen räumlichen Thatsachen der Congruenz, d. h. der Bewegung im Raume — mit Hinzuziehung der Axiomgruppen I und II — lediglich Folgerungen aus den sechs oben aufgestellten linearen und ebenen Axiomen der Congruenz sind, also das Parallelenaxiom zu ihrer Feststellung nicht notwendig ist.

Nehmen wir zu den Congruenzaxiomen noch das Parallelenaxiom III hinzu, so gelangen wir leicht zu den bekannten Thatsachen:

Satz 19. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel congruent, und umgekehrt: die Congruenz der Gegen- und Wechselwinkel hat zur Folge, dass die Geraden parallel sind.

Satz 20. Die Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei Rechte aus.

Definition. Wenn M ein beliebiger Punkt in einer Ebene α ist, so heisst die Gesamtheit aller Punkte A, für welche die Strecken MA einander congruent sind, ein *Kreis*; M heisst der *Mittelpunkt des Kreises*.

Auf Grund dieser Definition folgen mit Hülfe der Axiomgruppen III—IV leicht die bekannten Sätze über den Kreis, insbesondere die Möglichkeit der Konstruktion eines Kreises durch irgend drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte sowie der Satz über die Congruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne und der Satz von den Winkeln im Kreisviereck.

§ 8.

Die Axiomgruppe V: Axiom der Stetigkeit (Archimedisches Axiom).

Dieses Axiom ermöglicht die Einführung des Stetigkeitsbegriffes in die Geometrie; um dasselbe auszusprechen, müssen wir zuvor eine Festsetzung über die Gleichheit zweier Strecken auf einer Geraden treffen. Zu dem Zwecke können wir entweder die Axiome über Streckencongruenz zu Grunde legen und dementsprechend congruente Strecken als „gleiche" bezeichnen oder auf Grund der Axiomgruppen I—II durch geeignete Constructionen (vgl. Kap. V § 24) festsetzen, wie eine Strecke von einem Punkte einer gegebenen Geraden abzutragen ist, so dass eine bestimmte neue ihr „gleiche" Strecke entsteht. Nach einer solchen Festsetzung lautet das Archimedische Axiom, wie folgt:

V. *Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man construire dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. w. liegt und überdies die Strecken*

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$$

A A_1 A_2 A_3 A_4 A_{n-1} B A_n

Fig. 13.

einander gleich sind: dann giebt es in der Reihe der Punkte A_2, A_3, $A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, dass B zwischen A und A_n liegt.

Das Archimedische Axiom ist ein *lineares* Axiom.

Kapitel II.

Die Widerspruchslosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

§ 9.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

Die Axiome der fünf in Kapitel I aufgestellten Axiomgruppen stehen mit einander nicht in Widerspruch, d. h. es ist nicht möglich, durch logische Schlüsse aus denselben eine Thatsache abzuleiten, welche einem der aufgestellten Axiome widerspricht. Um

dies einzusehen, genügt es, eine Geometrie anzugeben, in der sämtliche Axiome der fünf Gruppen erfüllt sind.

Man betrachte den Bereich Ω aller derjenigen algebraischen Zahlen, welche hervorgehen, indem man von der Zahl 1 ausgeht und eine endliche Anzahl von Malen die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ anwendet, wobei ω jedesmal eine Zahl bedeuten kann, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist.

Wir denken uns ein Paar von Zahlen (x, y) des Bereiches Ω als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u:v:w)$ aus Ω, falls u, v nicht beide Null sind, als eine Gerade; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux+vy+w = 0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u:v:w)$ liegt; damit sind, wie man leicht sieht, die Axiome I 1—2 und III erfüllt. Die Zahlen des Bereiches Ω sind sämtlich reell; indem wir berücksichtigen, dass dieselben sich ihrer Grösse nach anordnen lassen, können wir leicht solche Festsetzungen für unsere Punkte und Geraden treffen, dass auch die Axiome II der Anordnung sämtlich gültig sind. In der That, sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ irgend welche Punkte auf einer Geraden, so möge dies ihre Reihenfolge auf der Geraden sein, wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder $y_1, y_2, y_3, \ldots$ in dieser Reihenfolge entweder beständig abnehmen oder wachsen; um ferner die Forderung des Axioms II 5 zu erfüllen, haben wir nur nöthig festzusetzen, dass alle Punkte (x, y), für die $ux+vy+w$ kleiner oder grösser als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite der Geraden $(u:v:w)$ gelegen sein sollen. Man überzeugt sich leicht, dass diese Festsetzung sich mit der vorigen Festsetzung in Uebereinstimmung befindet, derzufolge ja die Reihenfolge der Punkte auf einer Geraden bereits bestimmt ist.

Das Abtragen von Strecken und Winkeln erfolgt nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie. Eine Transformation von der Gestalt

$$x' = x+a,$$
$$y' = y+b$$

vermittelt die Parallelverschiebung von Strecken und Winkeln. Wird ferner der Punkt (0, 0) mit O, der Punkt (1, 0) mit E und ein beliebiger Punkt (a, b) mit C bezeichnet, so entsteht durch Drehung um den Winkel $\sphericalangle COE$, wenn O der feste Drehpunkt

ist, aus dem beliebigen Punkte (x, y) der Punkt (x', y'), wobei

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y$$

zu setzen ist. Da die Zahl

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

wiederum dem Bereiche Ω angehört, so gelten bei unseren Festsetzungen auch die Congruenzaxiome IV und offenbar ist auch das Archimedische Axiom V erfüllt.

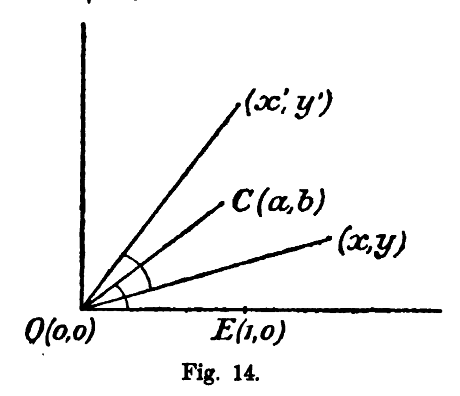


Fig. 14.

Wir schliessen hieraus, dass jeder Widerspruch in den Folgerungen aus unseren Axiomen auch in der Arithmetik des Bereiches Ω erkennbar sein müsste.

Die entsprechende Betrachtungsweise für die räumliche Geometrie bietet keine Schwierigkeit.

Wählen wir in der obigen Entwickelung statt des Bereiches Ω den Bereich aller reellen Zahlen, so erhalten wir ebenfalls eine Geometrie, in der sämtliche Axiome I—V gültig sind. Für unseren Beweis genügte die Zuhülfenahme des Bereiches Ω, der nur eine abzählbare Menge von Elementen enthält.

§ 10.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (Nicht-Euklidische Geometrie).

Nachdem wir die Widerspruchslosigkeit der Axiome erkannt haben, ist es von Interesse zu untersuchen, ob sie sämtlich von einander unabhängig sind. In der That zeigt sich, dass keines der Axiome durch logische Schlüsse aus den übrigen abgeleitet werden kann.

Was zunächst die einzelnen Axiome der Gruppen I, II und IV betrifft, so ist der Nachweis dafür leicht zu führen, dass die Axiome ein und derselben Gruppe je unter sich unabhängig sind[1]).

1) Vergl. meine Vorlesung über Euklidische Geometrie (Wintersemester 1898/99), die nach einer Ausarbeitung des Herrn Dr. *von Schaper* für meine Zuhörer autographirt worden ist.

Die Axiome der Gruppen I und II liegen bei unserer Darstellung den übrigen Axiomen zu Grunde, so dass es sich nur noch darum handelt, für jede der Gruppen III, IV und V die Unabhängigkeit von den übrigen nachzuweisen.

Die erstere Aussage des Parallelenaxioms kann aus den Axiomen der Gruppen I, II, IV bewiesen werden. Um dies einzusehen, verbinden wir den gegebenen Punkt A mit einem beliebigen Punkte B der Geraden a. Es sei ferner C irgend ein anderer Punkt der Geraden a; dann tragen wir $\sphericalangle ABC$ an AB im Punkte A nach derjenigen Seite in der nämlichen Ebene α an, auf der nicht der Punkt C liegt. Die so erhaltene Gerade durch A trifft die Gerade a nicht. In der That, schnitte sie a im Punkte D und nehmen wir etwa an, dass B zwischen C und D liege, so könnten wir auf a einen Punkt D' finden, so dass B zwischen D und D' liegt und überdies

$$AD \equiv BD'$$

ausfiele. Wegen der Congruenz der Dreiecke ABD und BAD' würde die Congruenz

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAD'$$

folgen und da die Winkel ABD' und ABD Nebenwinkel sind, so müssten sich dann mit Rücksicht auf Satz 12 auch die Winkel BAD und BAD' als Nebenwinkel erweisen; dies ist aber wegen Satz 1 nicht der Fall.

Die zweite Aussage des Parallelenaxioms III ist von den übrigen Axiomen unabhängig; dies zeigt man in bekannter Weise am einfachsten wie folgt. Man wähle die Punkte, Geraden und Ebenen der gewöhnlichen in § 9 construirten Geometrie, so weit sie innerhalb einer festen Kugel verlaufen, für sich allein als Elemente einer räumlichen Geometrie und vermittle die Congruenzen dieser Geometrie durch solche lineare Transformationen der gewöhnlichen Geometrie, welche die feste Kugel in sich überführen. Bei geeigneten Festsetzungen erkennt man, dass in dieser *„Nicht-Euklidischen“ Geometrie* sämtliche Axiome ausser dem Euklidischen Axiom III gültig sind und da die Möglichkeit der gewöhnlichen Geometrie in § 9 nachgewiesen worden ist, so folgt nunmehr auch die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie.

§ 11.

Die Unabhängigkeit der Congruenzaxiome.

Wir werden die Unabhängigkeit der Congruenzaxiome erkennen, indem wir den Nachweis führen, dass das Axiom IV 6 oder, was auf das nämliche hinausläuft, der erste Congruenzsatz für Dreiecke, d. i. Satz 10 durch logische Schlüsse nicht aus den übrigen Axiomen I, II, III, IV 1—5, V abgeleitet werden kann.

Wir wählen die Punkte, Geraden, Ebenen der gewöhnlichen Geometrie auch als Elemente der neuen räumlichen Geometrie und definiren das Abtragen der Winkel ebenfalls wie in der gewöhnlichen Geometrie, etwa in der Weise, wie in § 9 auseinandergesetzt worden ist; dagegen definiren wir das Abtragen der Strecken auf andere Art. Die zwei Punkte A_1, A_2 mögen in der gewöhnlichen Geometrie die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bez. x_2, y_2, z_2 haben; dann bezeichnen wir den positiven Wert von

$$\sqrt{(x_1-x_2+y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

als die Länge der Strecke A_1A_2 und nun sollen zwei beliebige Strecken A_1A_2 und $A_1'A_2'$ einander congruent heissen, wenn sie im eben festgesetzten Sinne gleiche Längen haben.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass in der so hergestellten räumlichen Geometrie die Axiome I, II, III, IV 1—2, 4—5, V gültig sind.

Um zu zeigen, dass auch das Axiom IV 3 erfüllt ist, wählen wir eine beliebige Gerade a und auf ihr drei Punkte A_1, A_2, A_3, sodass A_2 zwischen A_1 und A_3 liegt. Die Punkte x, y, z der Geraden a seien durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \lambda t+\lambda', \\ y &= \mu t+\mu', \\ z &= \nu t+\nu' \end{aligned}$$

gegeben, worin $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ gewisse Constante und t einen Parameter bedeutet. Sind t_1, $t_2\,(<t_1)$, $t_3\,(<t_2)$ die Parameterwerte, die den Punkten A_1, A_2, A_3 entsprechen, so finden wir für die Längen der drei Strecken A_1A_2, A_2A_3 und A_1A_3 bez. die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &(t_1-t_2)\,|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\,|, \\ &(t_2-t_3)\,|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\,|, \\ &(t_1-t_3)\,|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\,| \end{aligned}$$

und mithin ist die Summe der Längen der Strecken A_1A_2 und



$A_2 A_3$ gleich der Länge der Strecke $A_1 A_3$; dieser Umstand bedingt die Gültigkeit des Axioms IV 3.

Das Axiom IV 6 oder vielmehr der erste Congruenzsatz für Dreiecke ist in unserer Geometrie nicht immer erfüllt. Betrachten wir nämlich in der Ebene $z = 0$ die vier Punkte

O mit den Coordinaten	$x = 0,$	$y = 0,$
A „ „ „	$x = 1,$	$y = 0,$
B „ „ „	$x = 0,$	$y = 1,$
C „ „ „	$x = \frac{1}{2},$	$y = \frac{1}{2},$

so sind in den beiden (rechtwinkligen) Dreiecken OAC und OBC die Winkel bei C und die anliegenden Seiten entsprechend congruent, da die Seite OC beiden Dreiecken gemeinsam ist und die Strecken AC und BC die gleiche Länge $\frac{1}{2}$ besitzen. Dagegen haben die dritten Seiten OA und OB die Länge 1, bez. $\sqrt{2}$ und sind daher nicht einander congruent.

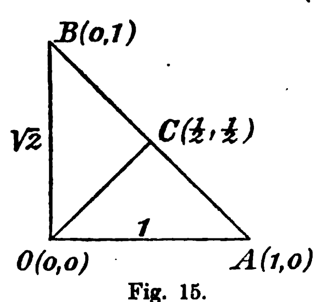


Fig. 15.

Es ist auch nicht schwer, in dieser Geometrie zwei Dreiecke zu finden, für welche das Axiom IV 6 selbst nicht erfüllt ist.

§ 12.

Die Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms V (Nicht-Archimedische Geometrie).

Um die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms V zu beweisen, müssen wir eine Geometrie herstellen, in der sämtliche Axiome mit Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind[1]).

Zu dem Zwecke construiren wir den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ hervorgehen; dabei soll ω irgend eine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Die Menge der Elemente von $\Omega(t)$ ist — ebenso wie von Ω — eine abzählbare. Die fünf Operationen sind sämtlich eindeutig und reell ausführbar;

1) *G. Veronese* hat in seinem tiefsinnigen Werke, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ebenfalls den Versuch gemacht, eine Geometrie aufzubauen, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist.

der Bereich $\Omega(t)$ enthält daher nur eindeutige und reelle Funktionen von t.

Es sei c irgend eine Funktion des Bereiches $\Omega(t)$; da die Funktion c eine algebraische Funktion von t ist, so kann sie jedenfalls nur für eine endliche Anzahl von Werten t verschwinden und es wird daher die Funktion c für genügend grosse positive Werte von t entweder stets positiv oder stets negativ ausfallen.

Wir sehen jetzt die Funktionen des Bereiches $\Omega(t)$ als eine Art complexer Zahlen an; offenbar sind in dem so definirten complexen Zahlensystem die gewöhnlichen Rechnungsregeln sämtlich gültig. Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses complexen Zahlensystems sind, die Zahl a grösser oder kleiner als b, in Zeichen: $a > b$ oder $a < b$, heissen, je nachdem die Differenz $c = a - b$ als Funktion von t für genügend grosse positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt. Bei dieser Festsetzung ist für die Zahlen unseres complexen Zahlensystems eine Anordnung ihrer Grösse nach möglich, die von der gewöhnlichen Art wie bei reellen Zahlen ist; auch gelten, wie man leicht erkennt, für unsere complexen Zahlen die Sätze, wonach Ungleichungen richtig bleiben, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Zahl addirt oder beide Seiten mit der gleichen Zahl > 0 multiplicirt.

Bedeutet n eine beliebige positive ganze rationale Zahl, so gilt für die beiden Zahlen n und t des Bereiches $\Omega(t)$ gewiss die Ungleichung $n < t$, da die Differenz $n - t$, als Funktion von t betrachtet, für genügend grosse positive Werte von t offenbar stets negativ ausfällt. Wir sprechen diese Thatsache in folgender Weise aus: die beiden Zahlen 1 und t des Bereiches $\Omega(t)$, die beide > 0 sind, besitzen die Eigenschaft, dass ein beliebiges Vielfaches der ersteren stets kleiner als die letztere Zahl bleibt.

Wir bauen nun aus den complexen Zahlen des Bereiches $\Omega(t)$ eine Geometrie genau auf dieselbe Art auf, wie dies in § 9 unter Zugrundelegung des Bereiches Ω von algebraischen Zahlen geschehen ist: wir denken uns ein System von drei Zahlen (x, y, z) des Bereiches $\Omega(t)$ als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ aus $\Omega(t)$, falls u, v, w nicht sämtlich Null sind, als eine Ebene; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) in der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt und die Gerade sei die Gesamtheit aller in zwei Ebenen gelegenen Punkte. Treffen wir sodann die entsprechenden Fest-

setzungen über die Anordnung der Elemente und über Abtragen von Strecken und Winkeln, wie in § 9, so entsteht eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie*, in welcher, wie die zuvor erörterten Eigenschaften des complexen Zahlensystems $\Omega(t)$ zeigen, sämtliche Axiome mit Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind. In der That können wir die Strecke 1 auf der Strecke t beliebig oft hinter einander abtragen, ohne dass der Endpunkt der Strecke t bedeckt wird; dies widerspricht der Forderung des Archimedischen Axioms.

Kapitel III.

Die Lehre von den Proportionen.

§ 13.

Complexe Zahlensysteme.

Am Anfang dieses Kapitels wollen wir einige kurze Auseinandersetzungen über complexe Zahlensysteme vorausschicken, die uns später insbesondere zur Erleichterung der Darstellung nützlich sein werden.

Die reellen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit ein System von Dingen mit folgenden Eigenschaften:

Sätze der Verknüpfung (1—12):

1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch „Addition“ eine bestimmte Zahl c, in Zeichen

$$a+b=c \quad \text{oder} \quad c=a+b.$$

2. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heisse 0 —, so dass für jedes a zugleich

$$a+0=a \quad \text{und} \quad 0+a=a$$

ist.

3. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existirt stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass

$$a+x=b \quad \text{bez.} \quad y+a=b$$

wird.

4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art durch „Multiplikation“ eine bestimmte Zahl c, in

Zeichen

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

5. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heisse 1 —, so dass für jedes a zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist.

6. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind und a nicht 0 ist, so existirt stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass

$$ax = b \quad \text{bez.} \quad ya = b$$

wird.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Rechnungsgesetze:

7. $a+(b+c) = (a+b)+c$
8. $a+b = b+a$
9. $a(bc) = (ab)c$
10. $a(b+c) = ab+ac$
11. $(a+b)c = ac+bc$
12. $ab = ba.$

Sätze der Anordnung (13—16).

13. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) grösser ($>$) als die andere; die letztere heisst dann die kleinere, in Zeichen:

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

14. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

15. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets

$$a+c > b+c \quad \text{und} \quad c+a > c+b.$$

16. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

Archimedischer Satz (17).

17. Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addiren, dass die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a+a+\cdots+a > b.$$

Ein System von Dingen, das nur einen Teil der Eigenschaften 1—17 besitzt, heisse ein *complexes Zahlensystem* oder auch ein *Zahlensystem* schlechthin. Ein Zahlensystem heisse ein *Archi-*

medisches oder ein *Nicht-Archimedisches*, jenachdem dasselbe der Forderung 17 genügt oder nicht.

Von den aufgestellten Eigenschaften 1—17 sind einige Folgen der übrigen. Es entsteht die Aufgabe, die logische Abhängigkeit dieser Eigenschaften zu untersuchen. Wir werden in Kapitel VI § 32 und § 33 zwei bestimmte Fragen der angedeuteten Art wegen ihrer geometrischen Bedeutung beantworten und wollen hier nur darauf hinweisen, dass jedenfalls die letzte Forderung 17 keine logische Folge der übrigen Eigenschaften ist, da ja beispielsweise das in § 12 betrachtete complexe Zahlensystem $\Omega(t)$ sämtliche Eigenschaften 1—16 besitzt, aber nicht die Forderung 17 erfüllt.

§ 14.

Beweis des Pascalschen Satzes.

In diesem und dem folgenden Kapitel legen wir unserer Untersuchung die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV zu Grunde. In dem gegenwärtigen Kapitel III gedenken wir Euklids Lehre von den Proportionen mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst eine Thatsache, die ein besonderer Fall des bekannten Pascalschen Satzes aus der Lehre von den Kegelschnitten ist und die ich künftig kurz als den Pascalschen Satz bezeichnen will. Dieser Satz lautet:

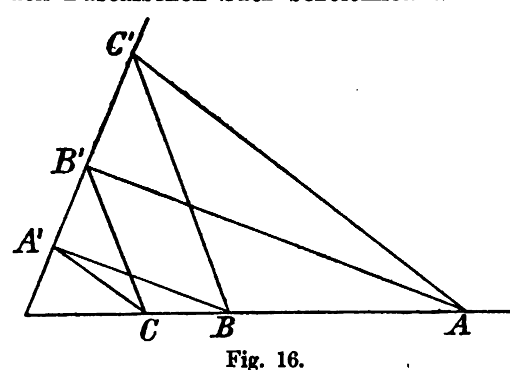


Fig. 16.

Satz 21[1] **(Pascalscher Satz).** *Es seien A, B, C bez. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkte der Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC', so ist auch BA' parallel AB'.*

Um den Beweis für diesen Satz zu erbringen, führen wir

1) *F. Schur* hat einen interessanten Beweis des Pascalschen Satzes auf Grund der sämtlichen Axiome I—II, IV in den Math. Ann. Bd. 51 veröffentlicht.

zunächst folgende Bezeichnungsweise ein. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist offenbar die Kathete a durch die Hypotenuse c und den von a und c eingeschlossenen Basiswinkel α eindeutig bestimmt: wir setzen kurz

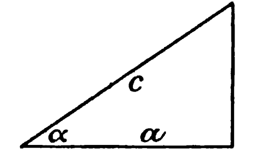


Fig. 17.

$$a = \alpha c,$$

sodass das Symbol αc stets eine bestimmte Strecke bedeutet, sobald c eine beliebig gegebene Strecke und α ein beliebig gegebener spitzer Winkel ist.

Nunmehr möge c eine beliebige Strecke und α, β mögen zwei beliebige spitze Winkel bedeuten; wir behaupten, dass allemal die Streckencongruenz

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c$$

besteht und somit die Symbole α, β stets mit einander vertauschbar sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir die Strecke $c = AB$ und tragen an diese Strecke in A zu beiden Seiten die Winkel α und β an. Dann fällen wir von B aus auf die anderen Schenkel dieser Winkel die Lote BC und BD, verbinden C mit D und fällen schliesslich von A aus das Lot AE auf CD.

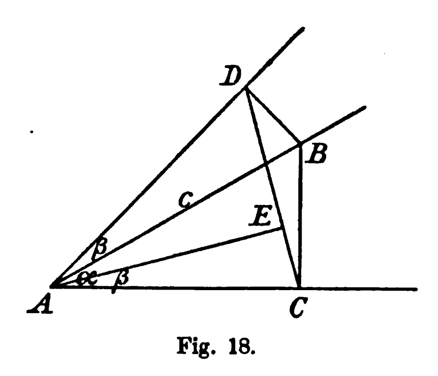
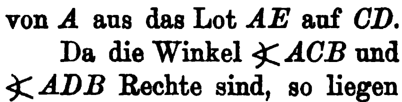


Fig. 18.



Da die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ Rechte sind, so liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise und demnach sind die beiden Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle ABD$ als Peripheriewinkel auf derselben Sehne AD einander congruent. Nun ist einerseits $\sphericalangle ACD$ zusammen mit dem $\sphericalangle CAE$ und andererseits $\sphericalangle ABD$ zusammen mit $\sphericalangle BAD$ je ein Rechter und folglich sind auch die Winkel $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle BAD$ einander congruent, d. h. es ist

$$\sphericalangle CAE \equiv \beta,$$

und daher

$$\sphericalangle DAE \equiv \alpha.$$

Wir gewinnen nun unmittelbar die Streckencongruenzen

$$\begin{array}{l|l} \beta c \equiv AD & \alpha c \equiv AC \\ \alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE & \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE, \end{array}$$

und hieraus folgt die Richtigkeit der vorhin behaupteten Congruenz.

Wir kehren nun zur Figur des Pascalschen Satzes zurück und bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Geraden mit O und die Strecken OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', CA', AC', BA', AB' bez. mit a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*. Sodann fällen wir von O Lote auf l, m, n; das Lot auf l schliesse mit den beiden Geraden OA, OA' die spitzen Winkel λ', λ ein und die Lote auf m bez. n mögen mit den Geraden OA und OA' die spitzen Winkel μ', μ bez. ν', ν bilden. Drücken wir nun diese drei Lote in der vorhin angegebenen Weise mit Hülfe der Hypotenusen und Basiswinkel in den betreffenden rechtwinkligen Dreiecken auf doppelte Weise aus, so erhalten wir folgende drei Streckencongruenzen

(1) $$\lambda b' \equiv \lambda' c,$$
(2) $$\mu a' \equiv \mu' c,$$
(3) $$\nu a' \equiv \nu' b.$$

Da nach Voraussetzung l parallel l^* und m parallel m^* sein soll, so stimmen die von O auf l^* bez. m^* zu fällenden Lote mit den Loten auf l bez. m überein und wir erhalten somit

(4) $$\lambda c' \equiv \lambda' b,$$

(5) $$\mu c' \equiv \mu' a.$$

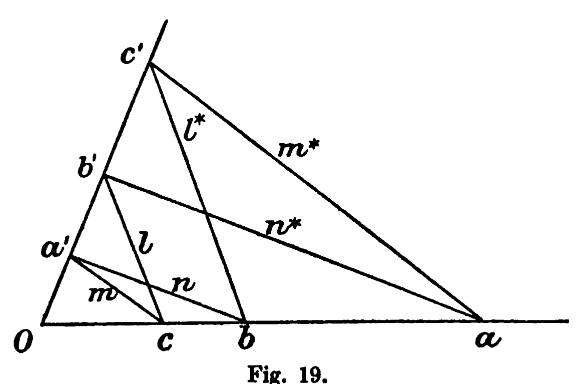


Fig. 19.

Wenn wir auf die Congruenz (3) links und rechts das Symbol $\lambda'\mu$ anwenden und bedenken, dass nach dem vorhin Bewiesenen die in Rede stehenden Symbole mit einander vertauschbar sind, so finden wir

$$\nu\lambda'\mu a' \equiv \nu'\mu\lambda' b.$$

In dieser Congruenz berücksichtigen wir links die Congruenz (2) und rechts (4); dann wird

$$\nu\lambda'\mu' c \equiv \nu'\mu\lambda c'$$

oder

$$\nu\mu'\lambda' c \equiv \nu'\lambda\mu c'.$$

Hierin berücksichtigen wir links die Congruenz (1) und rechts (5); dann wird

$$\nu\mu'\lambda b' \equiv \nu'\lambda\mu' a$$

oder

$$\lambda\mu'\nu b' \equiv \lambda\mu'\nu' a.$$

Wegen der Bedeutung unserer Symbole schliessen wir aus der letzten Congruenz sofort

$$\mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a$$

und hieraus

(6) $$\nu b' \equiv \nu' a.$$

Fassen wir nun das von O auf n gefällte Lot in's Auge und fällen auf dasselbe Lote von A und B' aus, so zeigt die Congruenz (6), dass die Fusspunkte der letzteren beiden Lote zusammenfallen, d. h. die Gerade $n^* = AB'$ steht zu dem Lote auf n senkrecht und ist mithin zu n parallel. Damit ist der Beweis für den Pascalschen Satz erbracht.

Wenn irgend eine Gerade, ein Punkt ausserhalb derselben und irgend ein Winkel gegeben ist, so kann man offenbar durch Abtragen dieses Winkels und Ziehen einer Parallelen eine Gerade finden, die durch den gegebenen Punkt geht und die gegebene Gerade unter dem gegebenen Winkel schneidet. Im Hinblick auf diesen Umstand dürfen wir uns zum Beweise des Pascalschen Satzes auch des folgenden einfachen Schlussverfahrens bedienen, das ich einer Mittheilung von anderer Seite verdanke.

Man ziehe durch B eine Gerade, die OA' im Punkte D' unter dem Winkel OCA' trifft, so dass die Congruenz

(1*) $$\sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OD'B$$

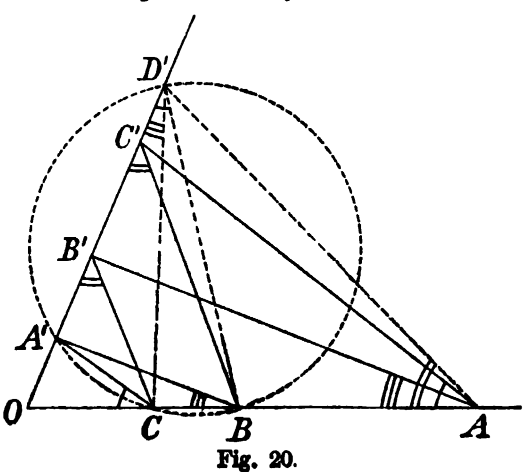


Fig. 20.

gilt; dann ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise $CBD'A'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von der Congruenz der Peripheriewinkel auf der nämlichen Sehne die Congruenz

$$(2^*) \qquad \sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OD'C.$$

Da CA' und AC' nach Voraussetzung einander parallel sind, so ist

$$(3^*) \qquad \sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OAC';$$

aus (1*) und (3*) folgern wir die Congruenz

$$\sphericalangle OD'B \equiv \sphericalangle OAC';$$

dann aber ist auch $BAD'C'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von den Winkeln im Kreisviereck die Congruenz

$$(4^*) \qquad \sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OC'B.$$

Da ferner nach Voraussetzung CB' parallel BC' ist, so haben wir auch

$$(5^*) \qquad \sphericalangle OB'C \equiv \sphericalangle OC'B;$$

aus (4*) und (5*) folgern wir die Congruenz

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C;$$

diese endlich lehrt, dass $CAD'B'$ ein Kreisviereck ist, und mithin gilt auch die Congruenz

$$(6^*) \qquad \sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OD'C.$$

Aus (2*) und (6*) folgt

$$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OAB'$$

und die Congruenz lehrt, dass BA' und AB' einander parallel sind, wie es der Pascalsche Satz verlangt.

Fällt D' mit einem der Punkte A', B', C' zusammen, so wird eine Abänderung dieses Schlussverfahrens nothwendig, die leicht ersichtlich ist.

§ 15.

Die Streckenrechnung auf Grund des Pascalschen Satzes.

Der im vorigen Paragraph bewiesene Pascalsche Satz setzt uns in den Stand, in die Geometrie eine Rechnung mit Strecken einzuführen, in der die Rechnungsregeln für reelle Zahlen sämtlich unverändert gültig sind.

Statt des Wortes „congruent“ und des Zeichens $\equiv$ bedienen wir uns in der Streckenrechnung des Wortes „gleich“ und des Zeichens $=$.

Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so bezeichnen wir $c = AC$ als die *Summe* der beiden Strecken $a = AB$ und $b = BC$ und setzen

$$c = a + b.$$

Die Strecken a und b heissen kleiner als c, in Zeichen:

$$a < c, \quad b < c,$$

und c heisst grösser als a und b, in Zeichen:

$$c > a, \quad c > b.$$

Aus den linearen Congruenzaxiomen IV 1—3 entnehmen wir leicht, dass für die eben definirte Addition der Strecken das associative Gesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

sowie das commutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gültig ist.

Um das Produkt einer Strecke a in eine Strecke b geometrisch zu definiren, bedienen wir uns folgender Construktion. Wir wählen zunächst eine beliebige Strecke, die für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt, und bezeichnen dieselbe mit 1. Nunmehr tragen wir auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels vom Scheitel O aus die Strecke 1 und ferner ebenfalls vom Scheitel O aus die Strecke b ab; sodann tragen wir auf dem anderen Schenkel die Strecke a ab. Wir verbinden die Endpunkte der Strecken 1 und a durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt der Strecke b eine Parallele; dieselbe möge auf dem anderen Schenkel eine Strecke c abschneiden: dann nennen wir diese Strecke c das *Produkt* der Strecke a in die Strecke b und bezeichnen sie mit

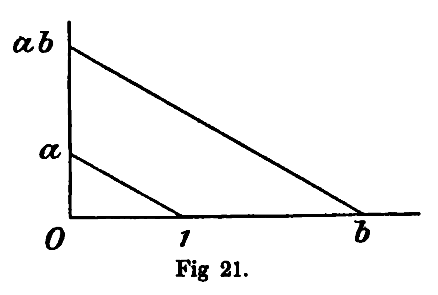


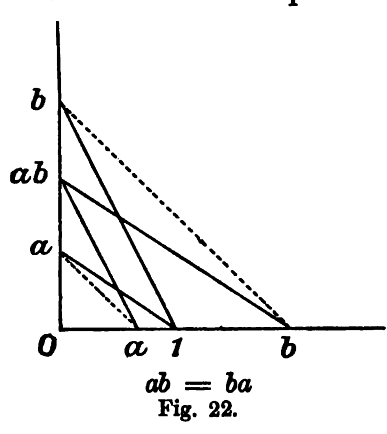
Fig 21.

$$c = ab.$$

Wir wollen vor Allem beweisen, dass für die eben definirte Multiplikation der Strecken das commutative Gesetz

$$ab = ba$$

gültig ist. Zu dem Zwecke construiren wir zuerst auf die oben festgesetzte Weise die Strecke ab. Ferner tragen wir auf dem ersten Schenkel des rechten Winkels die Strecke a und auf dem anderen Schenkel die Strecke b ab, verbinden den Endpunkt der Strecke 1 mit dem Endpunkt von b auf dem anderen Schenkel durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt von a auf dem ersten Schenkel eine Parallele: dieselbe schneidet auf dem anderen Schenkel die Strecke ba ab; in der That fällt diese Strecke ba, wie die Figur 22 zeigt, wegen der Parallelität der punktirten Hülfslinien nach dem Pascalschen Satze (Satz 21) mit der vorhin construirten Strecke ab zusammen.

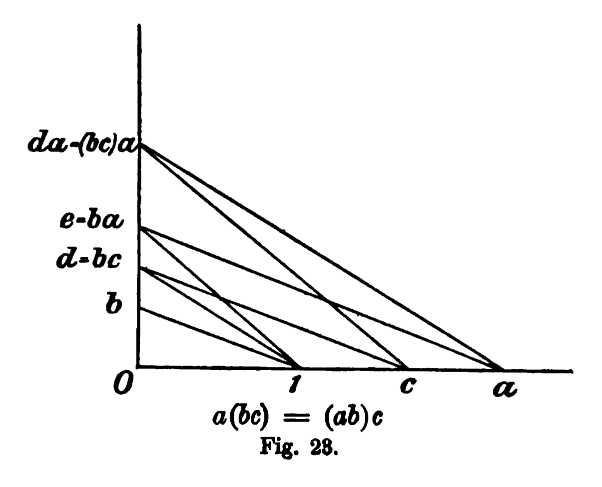


$ab = ba$
Fig. 22.

Um für unsere Multiplikation der Strecken das associative Gesetz

$$a(bc) = (ab)c$$

zu beweisen, construiren wir erst die Strecke $d = bc$, dann da, ferner die Strecke $e = ba$ und dann ec. Dass die Endpunkte von da und ec zusammenfallen, ist wiederum auf Grund des Pascalschen



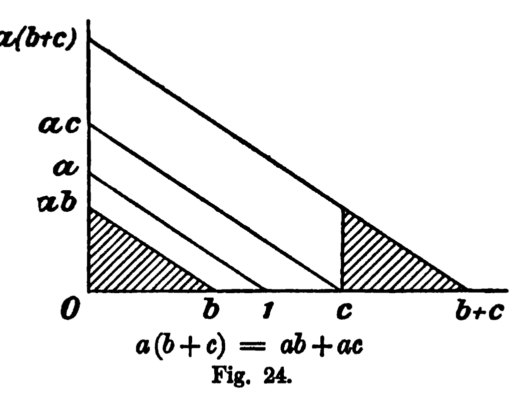
$a(bc) = (ab)c$
Fig. 23.

Satzes aus der Figur 23 unmittelbar ersichtlich und mit Benutzung des bereits bewiesenen commutativen Gesetzes folgt hieraus die obige Formel für das associative Gesetz der Streckenmultiplikation.

Endlich gilt in unserer Streckenrechnung auch das distributive Gesetz

$$a(b+c) = ab+ac.$$

Um dasselbe zu beweisen, construiren wir die Strecken ab, ac und $a(b+c)$ und ziehen dann durch den Endpunkt der Strecke c (s. Figur 24) eine Parallele zu dem anderen Schenkel des rechten Winkels. Die Congruenz der beiden rechtwinkligen in der Figur 24 schraffirten Dreiecke und die Anwendung des Satzes von der Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm liefert dann den gewünschten Nachweis.



$a(b+c) = ab+ac$
Fig. 24.

Sind b und c zwei beliebige Strecken, so giebt es stets eine Strecke a, sodass $c = ab$ wird; diese Strecke a wird mit $\frac{c}{b}$ bezeichnet und der *Quotient* von c durch b genannt.

§ 16.

Die Proportionen und die Aehnlichkeitssätze.

Mit Hülfe der eben dargelegten Streckenrechnung lässt sich *Euklids* Lehre von den Proportionen einwandsfrei und ohne Archimedisches Axiom in folgender Weise begründen.

Erklärung. Sind a, b, a', b' irgend vier Strecken, so soll die *Proportion*

$$a:b = a':b'$$

nichts anderes bedeuten als die Streckengleichung

$$ab' = ba'.$$

Definition. Zwei Dreiecke heissen *ähnlich*, wenn entsprechende Winkel in ihnen congruent sind.

Satz 22. Wenn a, b und a', b' entsprechende Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken sind, so gilt die Proportion

$$a : b = a' : b'.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, wo die von a, b und a', b' eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken Rechte sind, und denken uns die beiden Dreiecke in ein und denselben rechten Winkel eingetragen. Wir tragen sodann vom Scheitel aus auf einem Schenkel die Strecke 1 ab und ziehen durch den Endpunkt dieser Strecke 1 die Parallele zu den beiden Hypotenusen; dieselbe schneide auf dem anderen Schenkel die Strecke e ab; dann ist nach unserer Definition des Streckenproduktes

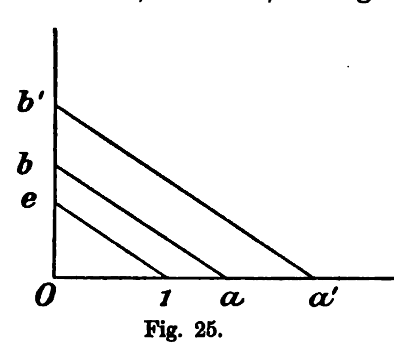


Fig. 25.

$$b = ea, \quad b' = ea';$$

mithin haben wir

$$ab' = ba'$$

d. h.

$$a : b = a' : b'.$$

Nunmehr kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück. Wir construiren in jedem der beiden ähnlichen Dreiecke den Schnittpunkt S bez. S' der drei Winkelhalbirenden und fällen von diesem die drei Lote r bez. r' auf die Dreiecksseiten; die auf diesen entstehenden Abschnitte bezeichnen wir mit

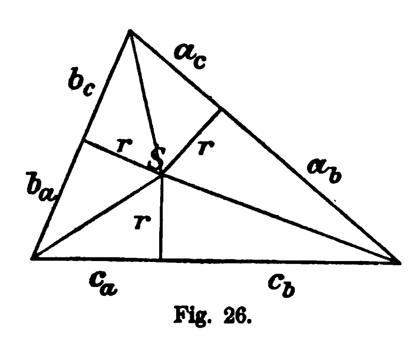


Fig. 26.

$$a_b,\ a_c,\ b_c,\ b_a,\ c_a,\ c_b$$

bez.

$$a'_b,\ a'_c,\ b'_c,\ b'_a,\ c'_a,\ c'_b.$$

Der vorhin bewiesene spezielle Fall unseres Satzes liefert dann die Proportionen

$$a_b : r = a'_b : r' \quad \Big| \quad b_c : r = b'_c : r'$$
$$a_c : r = a'_c : r' \quad \Big| \quad b_a : r = b'_a : r';$$

aus diesen schliessen wir mittelst des distributiven Gesetzes

$$a : r = a' : r', \quad b : r = b' : r'$$

und folglich mit Rücksicht auf das commutative Gesetz der Multiplikation

$$a : b = a' : b'.$$

Aus dem eben bewiesenen Satze 22 entnehmen wir leicht den Fundamentalsatz in der Lehre von den Proportionen, der wie folgt lautet:

Satz 23. *Schneiden zwei Parallele auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken a, b bez. a', b' ab, so gilt die Proportion*

$$a : b = a' : b'.$$

Umgekehrt, wenn vier Strecken a, b, a', b' diese Proportion erfüllen und a, a' und b, b' je auf einem Schenkel eines beliebigen Winkels abgetragen werden, so sind die Verbindungsgeraden der Endpunkte von a, b bez. von a', b' einander parallel.

§ 17.

Die Gleichungen der Geraden und Ebenen.

Zu dem bisherigen System von Strecken fügen wir noch ein zweites ebensolches System von Strecken hinzu; die Strecken des neuen Systems denken wir uns durch ein Merkzeichen kenntlich gemacht und nennen sie dann *„negative"* Strecken zum Unterschiede von den bisher betrachteten *„positiven"* Strecken. Führen wir noch die durch einen einzigen Punkt bestimmte Strecke 0 ein, so gelten bei gehörigen Festsetzungen in dieser erweiterten Streckenrechnung sämtliche Rechnungsregeln für reelle Zahlen, die in § 13 zusammengestellt worden sind. Wir heben folgende specielle Thatsachen hervor:

Es ist stets $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Wenn $ab = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Wenn $a > b$ und $c > 0$, so folgt stets $ac > bc$.

Wir nehmen nun in einer Ebene α durch einen Punkt O zwei zu einander senkrechte Gerade als festes rechtwinkliges Axenkreuz an und tragen dann die beliebigen Strecken x, y von O aus auf den beiden Geraden ab, und zwar nach der einen oder nach der anderen Seite hin, jenachdem die abzutragende Strecke x bez. y positiv oder negativ ist; sodann errichten wir die Lote



in den Endpunkten der Strecken x, y und bestimmen den Schnittpunkt P dieser Lote: die Strecken x, y heissen die *Coordinaten* des Punktes P; jeder Punkt der Ebene α ist durch seine Coordinaten x, y, die positive oder negative Strecken oder 0 sein können, eindeutig bestimmt.

Es sei l irgend eine Gerade in der Ebene α, die durch O und durch einen Punkt C mit den Coordinaten a, b gehe. Sind dann x, y die Coordinaten irgend eines Punktes von l, so finden wir leicht aus Satz 22

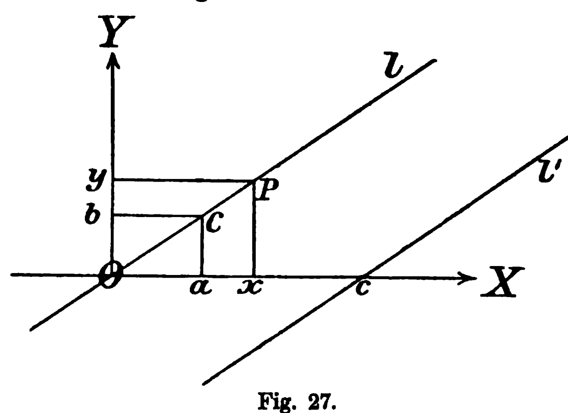


Fig. 27.

$$a : b = x : y$$

oder

$$bx - ay = 0$$

als die Gleichung der Geraden l. Ist l' eine zu l parallele Gerade, die auf der x-Axe die Strecke c abschneidet, so gelangen wir zu der Gleichung der Geraden l', indem wir in der Gleichung der Geraden l die Strecke x durch die Strecke $x - c$ ersetzen; die gewünschte Gleichung lautet also

$$bx - ay - bc = 0.$$

Aus diesen Entwickelungen schliessen wir leicht auf eine Weise, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist, dass jede Gerade in einer Ebene durch eine lineare Gleichung in den Coordinaten x, y dargestellt wird und umgekehrt jede solche lineare Gleichung eine Gerade darstellt, wenn die Coefficienten derselben in der betreffenden Geometrie vorkommende Strecken sind.

Die entsprechenden Resultate beweist man ebenso leicht in der räumlichen Geometrie.

Der weitere Aufbau der Geometrie kann von nun an nach den Methoden geschehen, die man in der analytischen Geometrie gemeinhin anwendet.

Wir haben bisher in diesem Kapitel III das Archimedische Axiom nirgends benutzt; setzen wir jetzt die Gültigkeit desselben voraus, so können wir den Punkten einer beliebigen Geraden im Raume reelle Zahlen zuordnen und zwar auf folgende Art.

Wir wählen auf der Geraden zwei beliebige Punkte aus und ordnen diesen die Zahlen 0 und 1 zu; sodann halbiren wir die durch sie bestimmte Strecke 01 und bezeichnen den entstehenden Mittelpunkt mit $\frac{1}{2}$, ferner den Mittelpunkt der Strecke $0\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{4}$ u. s. w.; nach n-maliger Ausführung dieses Verfahrens gelangen wir zu einem Punkte, dem die Zahl $\frac{1}{2^n}$ zuzuordnen ist. Nun tragen wir die Strecke $0\frac{1}{2^n}$ an den Punkt 0 sowohl nach der Seite des Punktes 1 als auch nach der anderen Seite hin etwa m mal hintereinander ab und erteilen den so entstehenden Punkten die Zahlenwerte $\frac{m}{2^n}$ bez. $-\frac{m}{2^n}$. Aus dem Archimedischen Axiom kann leicht geschlossen werden, dass auf Grund dieser Zuordnung sich jedem beliebigem Punkte der Geraden in eindeutig bestimmter Weise eine reelle Zahl zuordnen lässt und zwar so dass dieser Zuordnung folgende Eigenschaft zukommt: wenn A, B, C irgend drei Punkte der Geraden und bez. α, β, γ die zugehörigen reellen Zahlen sind und B zwischen A und C liegt, so erfüllen dieselben stets entweder die Ungleichung $\alpha < \beta < \gamma$ oder $\alpha > \beta > \gamma$.

Aus den Entwicklungen in Kap. II § 9 leuchtet ein, dass dort für jede Zahl, die dem algebraischen Zahlkörper Ω angehört, notwendig ein Punkt der Geraden existiren muss, dem sie zugeordnet ist. Ob auch jeder anderen reellen Zahl ein Punkt entspricht, lässt sich im allgemeinen nicht entscheiden, sondern hängt von der vorgelegten Geometrie ab.

Dagegen ist es stets möglich, das ursprüngliche System von Punkten, Geraden und Ebenen so durch „ideale" oder „irrationale" Elemente zu erweitern, dass auf irgend einer Geraden der entstehenden Geometrie jedem System von drei reellen Zahlen ohne Ausnahme ein Punkt zugeordnet ist. Durch gehörige Festsetzung kann zugleich erreicht werden, dass in der erweiterten Geometrie sämtliche Axiome I—V gültig sind. Diese (durch Hinzufügung der irrationalen Elemente) erweiterte Geometrie ist keine andere als die gewöhnliche analytische Geometrie des Raumes.

Kapitel IV.

Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18.

Die Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen.

Wir legen den Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels IV dieselben Axiome wie im Kapitel III zu Grunde, nämlich die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV.

Die im Kapitel III erörterte Lehre von den Proportionen und die daselbst eingeführte Streckenrechnung setzt uns in den Stand, die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Da nach den Entwickelungen im Kapitel III die Lehre von den Proportionen wesentlich auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so gilt dies auch für die Lehre von den Flächeninhalten; diese Begründung der Lehre von den Flächeninhalten erscheint mir als eine der merkwürdigsten Anwendungen des Pascalschen Satzes in der Elementargeometrie.

Erklärung. Verbindet man zwei Punkte eines Polygons P durch irgend einen Streckenzug, der ganz im Inneren des Polygons verläuft, so entstehen zwei neue Polygone P_1 und P_2, deren innere Punkte alle im Inneren von P liegen; wir sagen: **P zerfällt in P_1 und P_2, oder P_1 und P_2 setzen P zusammen.**

Definition. Zwei Polygone heissen *flächengleich*, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander congruent sind.

Definition. Zwei Polygone heissen *inhaltsgleich* oder *von gleichem Inhalte*, wenn es möglich ist, zu denselben flächengleiche Polygone hinzuzufügen, so dass die beiden zusammengesetzten Polygone einander flächengleich sind.

Aus diesen Definitionen folgt sofort: durch Zusammenfügung flächengleicher Polygone entstehen wieder **flächengleiche** Polygone, und wenn man flächengleiche Polygone von flächengleichen Polygonen wegnimmt, so sind die übrigbleibenden Polygone **inhaltsgleich.**

Ferner gelten folgende Sätze:

Satz 24. Sind zwei Polygone P_1 und P_2 mit einem dritten Polygon P_3 flächengleich, so sind sie auch unter einander flächengleich. Sind zwei Polygone mit einem dritten inhaltsgleich, so sind sie unter einander inhaltsgleich.

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich sowohl für P_1, als auch für P_2 eine Zerlegung in Dreiecke angeben, so dass einer jeden dieser beiden Zerlegungen je eine Zerlegung des Polygons P_3 in congruente Dreiecke entspricht. Indem wir diese Zerlegungen von P_3 gleichzeitig in Betracht ziehen, wird im Allgemeinen jedes Dreieck der einen Zerlegung durch Strecken, welche der anderen

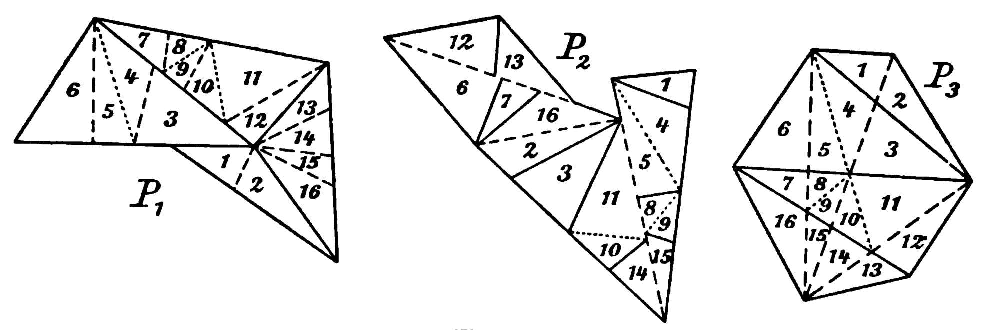


Fig. 28.

Zerlegung angehören, in Polygone zerlegt. Wir fügen nun noch so viele Strecken hinzu, dass jedes dieser Polygone selbst wieder in Dreiecke zerfällt und bringen dann die zwei entsprechenden Zerlegungen in Dreiecke in P_1 und in P_2 an; dann zerfallen offenbar diese beiden Polygone P_1 und P_2 in gleich viele paarweise einander congruente Dreiecke und sind somit nach der Definition einander flächengleich.

Der Beweis der zweiten Aussage des Satzes 24 ergiebt sich nunmehr ohne Schwierigkeit.

Wir definiren in der üblichen Weise die Begriffe: *Rechteck*, *Grundlinie* und *Höhe eines Parallelogrammes*, *Grundlinie* und *Höhe eines Dreiecks*.

§ 19.

Parallelogramme und Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe.

Die bekannte in den nebenstehenden Figuren illustrirte Schlussweise *Euklids* liefert den Satz:

Satz 25. Zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.

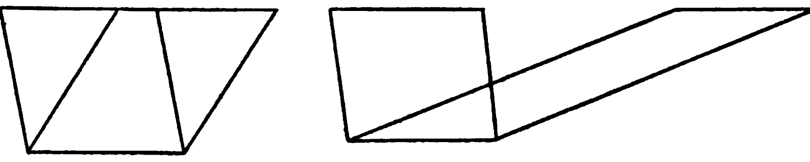


Fig. 29.

Ferner gilt die bekannte Thatsache:

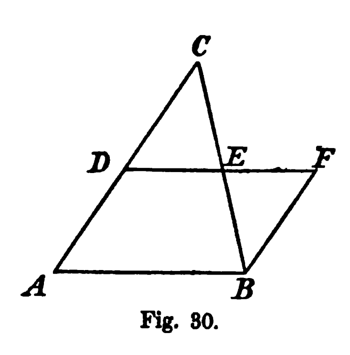


Fig. 30.

Satz 26. Ein jedes Dreieck ABC ist stets einem gewissen Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und halber Höhe flächengleich.

Beweis: Halbirt man AC in D und BC in E und verlängert dann DE um sich selbst bis F, so sind die Dreiecke DEC und FBE einander congruent und folglich sind Dreieck ABC und Parallelogramm $ABFD$ einander inhaltsgleich.

Aus Satz 25 und Satz 26 folgt mit Hinzuziehung von Satz 24 unmittelbar:

Satz 27. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.

Bekanntlich zeigt man gewöhnlich, dass zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe auch stets flächengleich sind. Wir bemerken jedoch, dass *dieser Nachweis ohne Benutzung des Archimedischen Axioms nicht möglich ist*; in der That lassen sich in unserer Nicht-Archimedischen Geometrie (vgl. Kap. II § 12) ohne Schwierigkeit solche zwei Dreiecke angeben, die gleiche Grundlinie und Höhe besitzen und folglich dem Satze 27 entsprechend inhaltsgleich, aber die dennoch nicht flächengleich sind. Als Beispiel mögen zwei Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinsamen Grundlinie $AB = 1$ und der gleichen Höhe 1 dienen, wenn die Spitze C des ersteren Dreiecks senkrecht über A und im zweiten Dreiecke der Fusspunkt F der von der Spitze D gefällten Höhe so gelegen ist, dass $AF = t$ wird.

Die übrigen Sätze aus der elementaren Geometrie über die Inhaltsgleichheit von Polygonen, insbesondere der Pythagoräische Lehrsatz sind leichte Folgerungen der eben aufgestellten Sätze. Wir begegnen aber dennoch bei der weiteren Durchführung der Theorie der Flächeninhalte einer wesentlichen Schwierigkeit. Ins-

besondere lassen es unsere bisherigen Betrachtungen dahingestellt, ob nicht etwa alle Polygone stets einander inhaltsgleich sind. In diesem Falle wären die sämtlichen vorhin aufgestellten Sätze nichtssagend und ohne Bedeutung. Weiter entsteht die allgemeinere Frage, ob zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinschaftlichen Seite auch notwendig in der anderen Seite übereinstimmen, d. h., ob ein Rechteck durch eine Seite und den Flächeninhalt eindeutig bestimmt ist.

Wie die nähere Ueberlegung zeigt, bedarf man zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragen der Umkehrung des Satzes 27, die folgendermassen lautet:

Satz 28. *Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke gleiche Grundlinie haben, so haben sie auch gleiche Höhe.*

Dieser fundamentale Satz 28 findet sich im ersten Buch der Elemente des *Euklid* als 39ster Satz; beim Beweise desselben beruft sich jedoch *Euklid* auf den allgemeinen Grössensatz: „*Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν*“ — ein Verfahren, welches auf die Einführung eines neuen geometrischen Axioms über Flächeninhalte hinausläuft.

Es gelingt nun, den Satz 28 und damit die Lehre von den Flächeninhalten auf dem hier von uns in Aussicht genommenen Wege, d. h. lediglich mit Hülfe der ebenen Axiome ohne Benutzung des Archimedischen Axioms zu begründen. Um dies einzusehen, haben wir den Begriff des Flächenmasses nöthig.

§ 20.

Das Flächenmass von Dreiecken und Polygonen.

Definition. Wenn wir in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c die beiden Höhen $h_a = AD$, $h_b = BE$ construiren, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCE und ACD nach Satz 22 die Proportion

$$a : h_b = b : h_a,$$

d. h.

$$ah_a = bh_b;$$

mithin ist in jedem Dreiecke das Produkt aus einer Grundlinie und der zu ihr gehörigen Höhe davon unabhängig, welche Seite des Dreiecks man als Grundlinie wählt. Das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks Δ heisse das *Flächenmass des Dreiecks* Δ und werde mit $F(\Delta)$ bezeichnet.

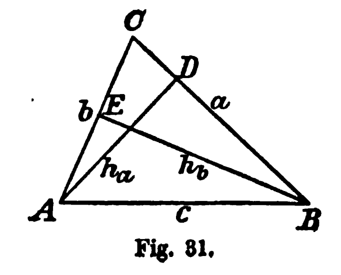
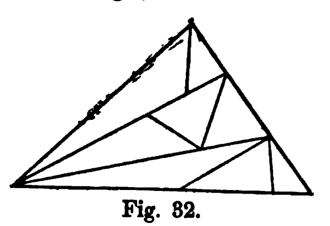


Fig. 31.

Erklärung. Eine Strecke, welche eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, heisst *Transversale*; dieselbe zerlegt das Dreieck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Höhe, deren Grundlinien in dieselbe Gerade fallen; eine solche Zerlegung heisse eine *transversale Zerlegung des Dreiecks.*

Satz 29. Wenn ein Dreieck Δ durch beliebige Gerade irgendwie in eine gewisse endliche Anzahl von Dreiecken Δ_k zerlegt wird, so ist stets das Flächenmass des Dreiecks Δ gleich der Summe der Flächenmasse der sämtlichen Dreiecke Δ_k.

Beweis. Aus dem distributiven Gesetze in unserer Streckenrechnung folgt unmittelbar, dass das Flächenmass eines beliebigen Dreiecks gleich der Summe der Flächenmasse zweier solcher Dreiecke ist, die durch irgendwelche transversale Zerlegung aus jenem Dreieck hervorgehen. Die wiederholte Anwendung dieser Thatsache zeigt, dass das Flächenmass eines beliebigen Dreiecks auch gleich der Summe der Flächenmasse der sämtlichen Dreiecke ist, die aus dem vorgelegten Dreiecke entstehen, wenn man nach einander beliebig viele transversale Zerlegungen ausführt.


Fig. 32.

Um nun den entsprechenden Nachweis für die beliebige Zerlegung des Dreiecks Δ in Dreiecke Δ_k zu erbringen, ziehen wir von der einen Ecke A des Dreieckes Δ durch jeden Teilpunkt der Zerlegung, d. h. durch jeden Eckpunkt der Dreiecke Δ_k eine Transversale; durch diese Transversalen zerfällt das Dreieck Δ in gewisse Dreiecke Δ_t. Jedes dieser Dreiecke Δ_t zerfällt durch die Teilstrecken der gegebenen Zerlegung in gewisse Dreiecke und Vierecke. Wenn wir in den Vierecken noch je eine Diagonale construiren, so zerfällt jedes Dreieck Δ_t in gewisse Dreiecke Δ_{tt}. Wir wollen nun zeigen, dass die Zerlegung in Dreiecke Δ_{tt} sowohl für die Dreiecke Δ_t als auch für die Dreiecke Δ_k nichts anderes als eine Kette von transversalen Zerlegungen bedeutet.

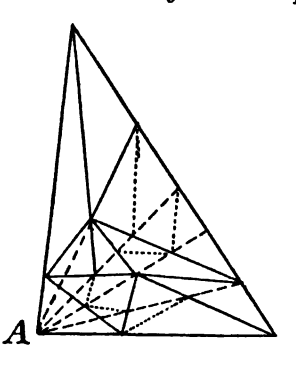


Fig. 33.

In der That, zunächst ist klar, dass jede Zerlegung eines Dreiecks in Teildreiecke stets durch eine Reihe von transversalen

Zerlegungen bewirkt werden kann, wenn bei der Zerlegung im Inneren des Dreiecks keine Teilpunkte liegen und überdies wenigstens eine Seite des Dreiecks von Teilpunkten frei bleibt.

Nun ist für die Dreiecke Δ_t unsere Behauptung aus dem Umstande ersichtlich, dass für jedes derselben das Innere sowie eine Seite, nämlich die dem Punkte A gegenüberliegende Seite von weiteren Teilpunkten frei ist.

Aber auch für jedes Δ_k ist die Zerlegung in Δ_{tt} auf transversale Zerlegungen zurückführbar. Betrachten wir nämlich ein Dreieck Δ_k, so wird es unter den von A ausgehenden Transversalen im Dreieck Δ eine bestimmte Transversale geben, in welche entweder eine Seite von Δ_k hineinfällt oder welche selbst das Dreieck Δ_k in zwei Dreiecke zerlegt. Im ersten Fall bleibt die betreffende Seite des Dreiecks Δ_k überhaupt frei von weiteren Teilpunkten bei der Zerlegung in Dreiecke Δ_{tt}; im letzteren Falle ist die im Inneren des Dreiecks Δ_k verlaufende Strecke jener Transversale in den beiden entstehenden Dreiecken eine Seite, die bei der Teilung in Dreiecke Δ_{tt} von weiteren Teilpunkten gewiss frei bleibt.

Nach der am Anfang dieses Beweises angestellten Betrachtung ist das Flächenmass $F(\Delta)$ des Dreiecks Δ gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_t)$ der Dreiecke Δ_t, und diese Summe ist gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_{tt})$. Andererseits ist auch die Summe über die Flächenmasse $F(\Delta_k)$ aller Dreiecke Δ_k gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_{tt})$, und hieraus folgt endlich, dass das Flächenmass $F(\Delta)$ auch gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_k)$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes 29 vollständig erbracht.

Definition. Definiren wir das Flächenmass $F(P)$ eines Polygons als die Summe der Flächenmasse aller Dreiecke, in die dasselbe bei einer bestimmten Zerlegung zerfällt, so erkennen wir auf Grund des Satzes 29 durch eine ähnliche Schlussweise, wie wir sie in § 18 beim Beweise des Satzes 24 angewandt haben, dass das Flächenmass eines Polygons von der Art der Zerlegung in Dreiecke unabhängig ist und mithin allein durch das Polygon sich eindeutig bestimmt. Aus dieser Definition entnehmen wir vermittels des Satzes 29 die Thatsache, dass flächengleiche Polygone gleiches Flächenmass haben.

Sind ferner P und Q zwei inhaltsgleiche Polygone, so muss es nach der Definition zwei flächengleiche Polygone P' und Q' geben, so dass das aus P und P' zusammengesetzte Polygon mit

dem aus Q und Q' zusammengesetzten Polygon flächengleich ausfällt. Aus den beiden Gleichungen:

$$F(P+P') = F(Q+Q'),$$
$$F(P') = F(Q')$$

schliessen wir leicht

$$F(P) = F(Q),$$

d. h. **inhaltsgleiche Polygone haben gleiches Flächenmass.**

Aus der letzteren Thatsache entnehmen wir unmittelbar den Beweis des Satzes 28. Bezeichnen wir nämlich die gleiche Grundlinie der beiden Dreiecke mit g, die zugehörigen Höhen mit h und h', so schliessen wir aus der angenommenen Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke, dass dieselben auch gleiches Flächenmass haben müssen, d. h. es folgt:

$$\tfrac{1}{2}gh = \tfrac{1}{2}gh'$$

und mithin nach Division durch $\frac{1}{2}g$

$$h = h';$$

dies ist die Aussage des Satzes 28.

§ 21.

Die Inhaltsgleichheit und das Flächenmass.

In § 20 haben wir gefunden, dass inhaltsgleiche Polygone stets gleiches Flächenmass haben. Diese Aussage lässt sich auch umkehren.

Fig. 34.

Um diese Umkehrung zu beweisen, betrachten wir zunächst zwei Dreiecke ABC und $AB'C'$ mit gemeinsamem rechten Winkel bei A. Die Flächenmasse dieser beiden Dreiecke drücken sich durch die Formeln

$$F(ABC) = \tfrac{1}{2}AB \cdot AC,$$
$$F(AB'C') = \tfrac{1}{2}AB' \cdot AC'$$

aus. Nehmen wir an, dass diese beiden Flächenmasse einander gleich sind, so folgt:

$$AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$$

oder

$$AB : AB' = AC' : AC$$

und hieraus ergiebt sich nach Satz 23, dass die beiden Geraden BC' und $B'C$ einander parallel sind und sodann erweisen sich nach Satz 27 die beiden Dreiecke $BC'B'$ und $BC'C$ als inhaltsgleich. Durch Hinzufügen des Dreiecks ABC' folgt, dass die beiden Dreiecke ABC und $AB'C'$ einander inhaltsgleich sind. Wir haben damit erkannt, dass zwei rechtwinklige Dreiecke mit gleichem Flächenmass auch stets einander inhaltsgleich sind.

Nehmen wir jetzt ein beliebiges Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h, so ist dasselbe nach Satz 27 inhaltsgleich einem rechtwinkligen Dreieck mit den beiden Katheten g und h; und da das ursprüngliche Dreieck offenbar dasselbe Flächenmass wie das rechtwinklige Dreieck besitzt, so folgt, dass in der letzten Betrachtung die Einschränkung auf rechtwinklige Dreiecke nicht nötig war; damit haben wir erkannt, dass zwei beliebige Dreiecke mit gleichem Flächenmass auch stets einander inhaltsgleich sind.

Es sei nunmehr ein beliebiges Polygon P mit dem Flächenmass g vorgelegt; P zerfalle in n Dreiecke mit den Flächenmassen bez. $g_1, g_2, \ldots, g_n$; dann ist

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n.$$

Wir construiren nun ein Dreieck ABC mit der Grundlinie

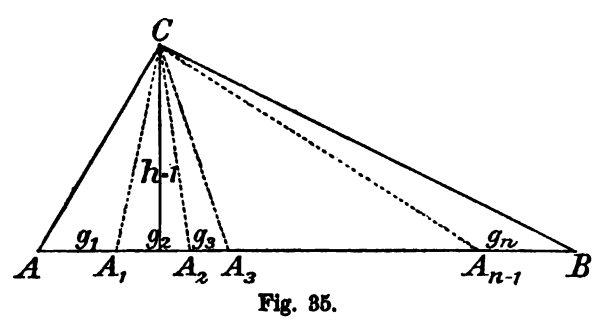


Fig. 35.

$AB = g$ und der Höhe $h = 1$ und markiren auf der Grundlinie die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, sodass

$$g_1 = AA_1, \quad g_2 = A_1A_2, \ldots, \quad g_{n-1} = A_{n-2}A_{n-1}, \quad g_n = A_{n-1}B$$

ausfällt. Da die Dreiecke innerhalb des Polygons P bez. die

gleichen Flächenmasse besitzen, wie die Dreiecke AA_1C, A_1A_2C, ..., $A_{n-2}A_{n-1}C$, $A_{n-1}BC$, so sind sie nach dem vorhin Bewiesenen diesen auch inhaltsgleich; folglich ist das Polygon P einem Dreiecke mit der Grundlinie g und der Höhe $h = 1$ inhaltsgleich. Hieraus folgt mit Hülfe von Satz 24, dass zwei Polygone mit gleichem Flächenmass einander stets inhaltsgleich sind.

Die beiden in diesem und dem vorigen Paragraph gefundenen Thatsachen fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Satz 30. *Zwei inhaltsgleiche Polygone haben stets das gleiche Flächenmass*; und umgekehrt: *Zwei Polygone mit gleichem Flächenmass sind stets einander inhaltsgleich.*

Insbesondere müssen zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite auch in den anderen Seiten übereinstimmen. Auch folgt der Satz:

Satz 31. Zerlegt man ein Rechteck durch Gerade in mehrere Dreiecke und lässt auch nur eines dieser Dreiecke fort, so kann man mit den übrigen Dreiecken das Rechteck nicht mehr ausfüllen.

Dieser Satz 31 ist von *F. Schur*[1]) und *W. Killing*[2]) mit Hülfe des Archimedischen Axioms bewiesen und von *O. Stolz*[3]) als Axiom hingestellt worden. Im Vorstehenden ist gezeigt, dass derselbe völlig unabhängig von dem Archimedischen Axiom gilt. Der Satz 31 reicht übrigens zur Begründung des Euklidischen Satzes von der Gleichheit der Höhen in inhaltsgleichen Dreiecken auf gleicher Grundlinie (Satz 28) an sich nicht aus, wenn man von der Anwendung des Archimedischen Axioms absieht.

Zum Beweise der Sätze 28, 29, 30 haben wir wesentlich die in Kapitel III § 15 eingeführte Streckenrechnung benutzt, und da diese im Wesentlichen auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so erweist sich für die Lehre von den Flächeninhalten der Pascalsche Satz als der wichtigste Baustein. Wir erkennen leicht, dass auch umgekehrt aus den Sätzen 27 und 28 der Pascalsche Satz wieder gewonnen werden kann.

Von zwei Polygonen P und Q nennen wir P *inhaltskleiner* bez. *inhaltsgrösser* als Q, je nachdem das Flächenmass $F(P)$ kleiner oder grösser als $F(Q)$ ausfällt. Es ist nach dem Vorstehenden klar, dass die Begriffe inhaltsgleich, inhaltskleiner und inhaltsgrösser sich gegenseitig ausschliessen. Ferner erkennen wir leicht,

1) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.
2) Grundlagen der Geometrie, Bd. 2, Absch. 5, § 5, 1898.
3) Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

dass ein Polygon, welches ganz im Inneren eines anderen Polygons liegt, stets inhaltskleiner als dieses sein muss.

Hiermit haben wir die wesentlichen Sätze der Lehre von den Flächeninhalten begründet.

Kapitel V.

Der Desarguessche Satz.

§ 22.

Der Desarguessche Satz und der Beweis desselben in der Ebene mit Hülfe der Congruenzaxiome.

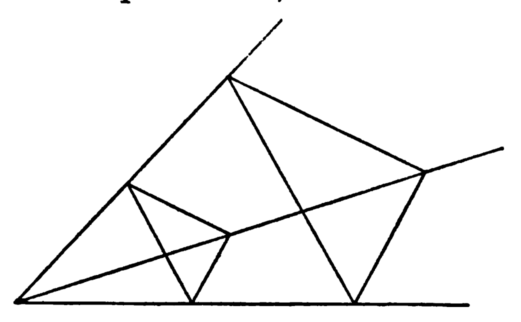
Von den im Kapitel I aufgestellten Axiomen sind diejenigen der Gruppen II—V sämtlich teils lineare, teils ebene Axiome; die Axiome 3—7 der Gruppe I sind die einzigen räumlichen Axiome. Um die Bedeutung dieser räumlichen Axiome klar zu erkennen, denken wir uns irgend eine ebene Geometrie vorgelegt und untersuchen allgemein die Bedingungen dafür, dass diese ebene Geometrie sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt, in welcher wenigstens die Axiome der Gruppen I—III sämtlich erfüllt sind.

Auf Grund der Axiome der Gruppen I—III ist es bekanntlich leicht möglich, den sogenannten Desarguesschen Satz zu beweisen; derselbe ist ein ebener Schnittpunktsatz. Wir nehmen insbesondere die Gerade, auf der die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke liegen sollen, zur „Unendlichfernen“, wie man sagt, und bezeichnen den so entstehenden Satz nebst seiner Umkehrung schlechthin als Desarguesschen Satz; dieser Satz lautet, wie folgt:

Satz 32. (Desarguesscher Satz.) Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, dass je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel, und umgekehrt:

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, dass die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt

laufen oder einander parallel sind, und wenn ferner zwei Paare



entsprechender Seiten in den Dreiecken einander parallel sind, so sind auch die dritten Seiten der beiden Dreiecke einander parallel.

Wie bereits erwähnt, ist der Satz 32 eine Folge der Axiome I—III; dieser Thatsache gemäss ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene jedenfalls eine notwendige Bedingung dafür, dass die Geometrie dieser Ebene sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt, in welcher die Axiome der Gruppen I—III sämtlich erfüllt sind.

Wir nehmen nun wie in den Kapiteln III und IV eine ebene Geometrie an, in welcher die Axiome I 1—2 und II—IV gelten, und denken uns in derselben nach § 15 eine Streckenrechnung eingeführt: dann lässt sich, wie in § 17 dargelegt worden ist, jedem Punkte der Ebene ein Paar von Strecken (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis von drei Strecken $(u : v : w)$ zuordnen derart, dass die lineare Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade darstellt. Das System aller Strecken in unserer Geometrie bildet nach § 17 einen Zahlenbereich, für welchen die in § 13 aufgezählten Eigenschaften 1—16 bestehen, und wir können daher mittelst dieses Zahlenbereiches, ähnlich wie es in § 9 oder § 12 mittelst des Zahlensystems Ω bez. $\Omega(t)$ geschehen ist, eine räumliche Geometrie construiren: wir setzen zu dem Zwecke fest, dass ein System von drei Strecken (x, y, z) einen Punkt, die Verhältnisse von vier Strecken $(u : v : w : r)$ eine Ebene darstellen möge, während die Geraden als Schnitte zweier Ebenen definirt sind; dabei drückt die lineare Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

aus, dass der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Was endlich die Anordnung der Punkte auf einer Geraden oder

der Punkte einer Ebene in Bezug auf eine Gerade in ihr oder endlich die Anordnung der Punkte in Bezug auf eine Ebene im Raume anbetrifft, so wird diese in analoger Weise durch Ungleichungen zwischen Strecken bestimmt, wie dies in § 9 für die Ebene geschehen ist.

Da wir durch das Einsetzen des Wertes $z = 0$ die ursprüngliche ebene Geometrie wieder gewinnen, so erkennen wir, dass unsere ebene Geometrie als Teil einer räumlichen Geometrie betrachtet werden kann. Nun ist hierfür die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes nach den obigen Ausführungen eine notwendige Bedingung, und daher folgt, dass in der angenommenen ebenen Geometrie auch der Desarguessche Satz gelten muss.

Wir bemerken, dass die eben gefundene Thatsache sich auch direkt aus dem Satze 23 in der Lehre von den Proportionen ohne Mühe ableiten lässt.

§ 23.

Die Nichtbeweisbarkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene ohne Hülfe der Congruenzaxiome.

Wir untersuchen nun die Frage, ob in der ebenen Geometrie auch ohne Hülfe der Congruenzaxiome der Desarguessche Satz bewiesen werden kann, und gelangen dabei zu folgendem Resultate:

Satz 33. *Es giebt eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome* I 1—2, II—III, IV 1—5, V, *d. h. sämtliche linearen und ebenen Axiome mit Ausnahme des Congruenzaxioms* IV 6 *erfüllt sind, während der Desarguessche Satz* (Satz 32) *nicht gilt. Der Desarguessche Satz kann mithin aus den genannten Axiomen allein nicht gefolgert werden: es bedarf zum Beweise desselben notwendig entweder der räumlichen Axiome oder der sämtlichen Congruenzaxiome.*

Beweis. Wir wählen in der gewöhnlichen ebenen Geometrie, deren Möglichkeit bereits im Kapitel II § 9 erkannt worden ist, irgend zwei zu einander senkrechte Gerade als Coordinatenaxen X, Y und denken uns um den Nullpunkt O dieses Coordinatensystems als Mittelpunkt eine Ellipse mit den Halbaxen 1 und $\frac{1}{2}$ construirt; endlich bezeichnen wir mit F den Punkt, welcher in der Entfernung $\frac{3}{2}$ von O auf der positiven X-Axe liegt.

Wir fassen nun die Gesamtheit aller Kreise ins Auge, welche die Ellipse in vier reellen — getrennten oder beliebig zusammenfallenden — Punkten schneiden, und suchen unter allen auf diesen Kreisen gelegenen Punkten denjenigen Punkt zu bestimmen, der auf der positiven X-Axe am weitesten vom Nullpunkt entfernt

4*

ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Kreise aus, der die Ellipse in vier Punkten schneidet und die positive X-Axe im Punkte C treffen möge. Diesen Kreis denken wir uns dann um den Punkt C derart gedreht, dass zwei von den vier Schnittpunkten oder mehr in einen einzigen Punkt A zusammenfallen, während die übrigen reell bleiben. Der so entstehende Berührungskreis werde alsdann vergrössert derart, dass stets der Punkt A Berührungspunkt mit der Ellipse bleibt; hierdurch gelangen wir notwendig zu einem Kreise, der die Ellipse entweder noch in einem anderen Punkte B berührt oder in A mit der Ellipse eine vierpunktige Berührung aufweist und der überdies die positive X-Axe in einem entfernteren Punkte als C trifft. Der gesuchte entfernteste Punkt wird sich demnach unter denjenigen Punkten befinden, die von den doppeltberührenden ausserhalb der Ellipse verlaufenden Kreisen auf der positiven X-Axe ausgeschnitten werden. Die doppeltberührenden ausserhalb der Ellipse verlaufenden Kreise liegen nun, wie man leicht sieht, sämtlich zur Y-Axe symmetrisch. Es seien a, b die Coordinaten irgend eines Punktes der Ellipse: dann lehrt eine leichte Rechnung, dass der in diesem Punkte berührende zur Y-Axe symmetrische Kreis auf der positiven X-Axe die Strecke

$$x = |\sqrt{1+3b^2}|$$

abschneidet. Der grösstmögliche Wert dieses Ausdrucks tritt für $b = \frac{1}{2}$ ein und wird somit gleich $\frac{1}{2}|\sqrt{7}|$. Da der vorhin mit F bezeichnete Punkt auf der X-Axe die Abscisse $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}|\sqrt{7}|$ aufweist, so folgt, dass unter den die Ellipse viermal treffenden Kreisen sich gewiss keiner befindet, der durch den Punkt F läuft.

Nunmehr stellen wir uns eine neue ebene Geometrie in folgender Weise her. Als Punkte der neuen Geometrie nehmen wir die Punkte der XY-Ebene; als Gerade der neuen Geometrie nehmen wir diejenigen Geraden der XY-Ebene unverändert, welche die feste Ellipse berühren oder gar nicht treffen; ist dagegen g eine Gerade der XY-Ebene, die die Ellipse in zwei Punkten P und Q trifft, so construiren wir durch P, Q und den festen Punkt F einen Kreis; dieser Kreis hat, wie aus dem oben Bewiesenen hervorgeht, keinen weiteren Punkt mit der Ellipse gemein. Wir denken uns nun an Stelle des zwischen P und Q innerhalb der Ellipse gelegenen Stückes der Geraden g denjenigen Bogen des eben construirten Kreises gesetzt, der zwischen P und Q innerhalb der Ellipse verläuft. Den Linienzug, welcher aus den beiden

von P und Q ausgehenden unendlichen Stücken der Geraden g und dem eben construirten Kreisbogen PQ besteht, nehmen wir als Gerade der neu herzustellenden Geometrie. Denken wir uns für alle Geraden der XY-Ebene die entsprechenden Linienzüge construirt, so entsteht ein System von Linienzügen, welche, als

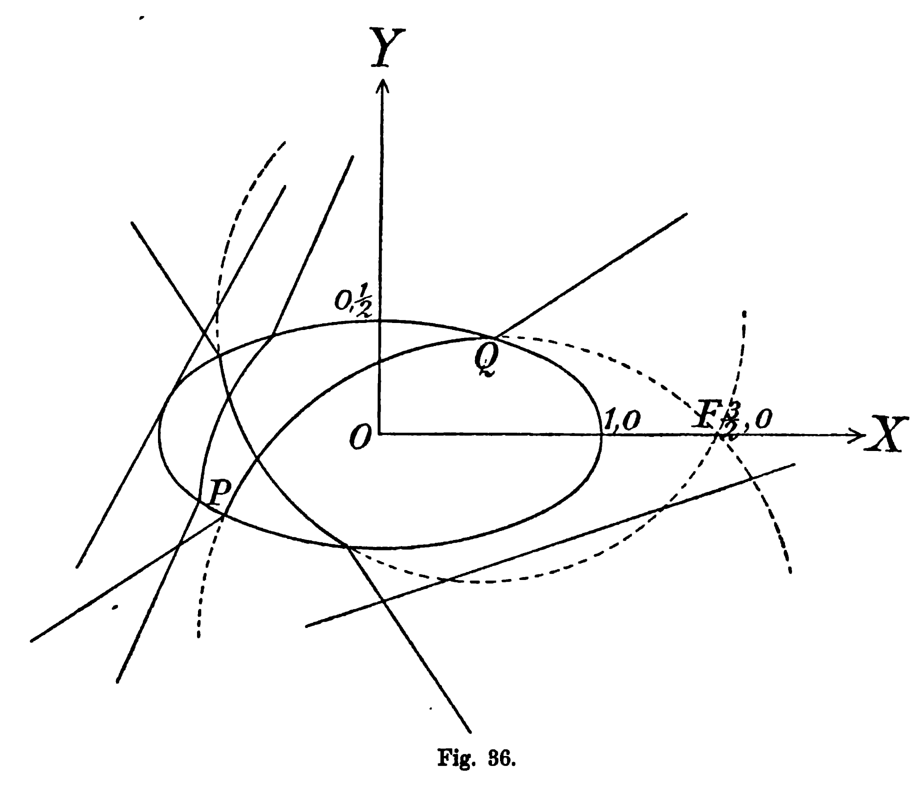


Fig. 36.

Gerade einer Geometrie aufgefasst, offenbar den Axiomen I 1—2 und III genügen. Bei Festsetzung der natürlichen Anordnung für die Punkte und Geraden in unserer neuen Geometrie erkennen wir unmittelbar, dass auch die Axiome II gültig sind.

Ferner nennen wir zwei Strecken AB und $A'B'$ in unserer neuen Geometrie congruent, wenn der zwischen A und B verlaufende Linienzug die gleiche natürliche Länge hat, wie der zwischen A' und B' verlaufende Linienzug.

Endlich bedürfen wir einer Festsetzung betreffs der Congruenz der Winkel. Sobald keiner von den Scheiteln der zu vergleichenden Winkel auf der Ellipse liegt, nennen wir zwei Winkel einander congruent, wenn sie im gewöhnlichen Sinne einander gleich sind. Im anderen Falle treffen wir folgende Festsetzung. Es

mögen die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge und die Punkte $A', B' C'$ in dieser Reihenfolge je auf einer Geraden unserer neuen Geometrie liegen; D sei ein Punkt ausserhalb der Geraden ABC und D' ein Punkt ausserhalb der Geraden $A'B'C'$: dann mögen für die Winkel zwischen diesen Geraden in unserer neuen Geometrie die Congruenzen

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D' \quad \text{und} \quad \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'$$

gelten, sobald für die natürlichen Winkel zwischen den entsprechenden Linienzügen in der gewöhnlichen Geometrie die Proportion

$$\sphericalangle ABD : \sphericalangle CBD = \sphericalangle A'B'D' : \sphericalangle C'B'D'$$

erfüllt ist. Bei diesen Festsetzungen sind auch die Axiome IV 1—5 und V gültig.

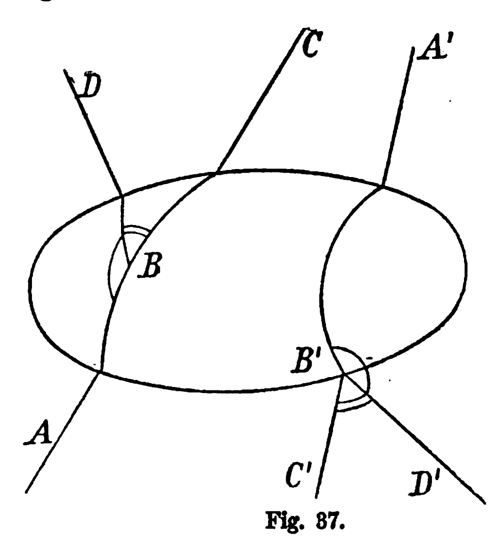


Fig. 37.

Um einzusehen, dass in unserer neu hergestellten Geometrie der Desarguessche Satz nicht gilt, betrachten wir folgende drei gewöhnliche gerade Linien in der XY-Ebene: die X-Axe, die Y-Axe und die Gerade, welche die beiden Ellipsenpunkte $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ und $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ mit einander verbindet. Da diese drei gewöhnlichen geraden Linien durch den Nullpunkt O laufen, so können wir leicht zwei solche Dreiecke angeben, deren Ecken bez. auf jenen drei Geraden liegen, deren entsprechende Seiten paarweise einander parallel laufen und die sämtlich ausserhalb der Ellipse gelegen sind. Da die Linienzüge, welche aus den genannten drei geraden Linien entspringen, sich, wie Figur 38

zeigt und wie man leicht durch Rechnung bestätigt, nicht in

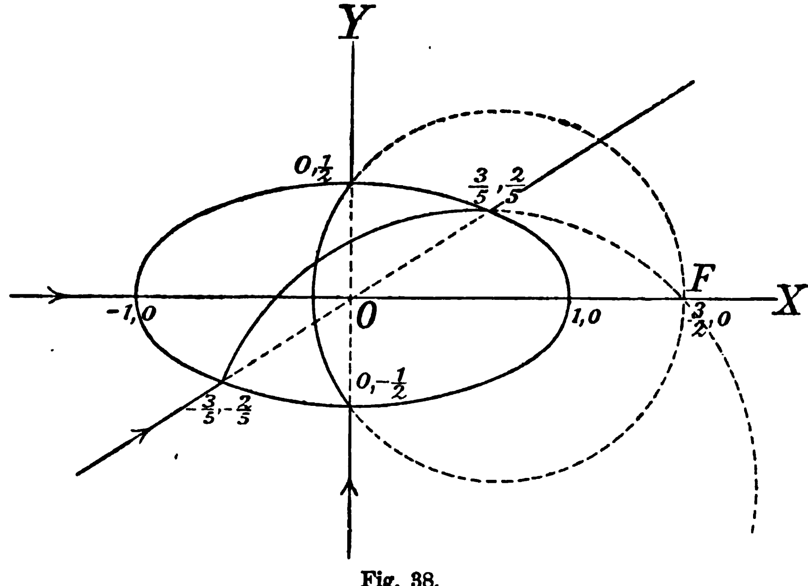


Fig. 38.

einem Punkte treffen, so folgt, dass der Desarguessche Satz in der neuen ebenen Geometrie für die beiden vorhin construirten Dreiecke gewiss nicht gilt.

Die von uns hergestellte ebene Geometrie dient zugleich als Beispiel einer ebenen Geometrie, in welcher die Axiome I 1—2, II—III, IV 1—5, V gültig sind, und die sich dennoch nicht als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt.

§ 24.

Einführung einer Streckenrechnung ohne Hülfe der Congruenzaxiome auf Grund des Desarguesschen Satzes.

Um die Bedeutung des Desarguesschen Satzes (Satz 32) vollständig zu erkennen, legen wir eine ebene Geometrie zu Grunde, in welcher die Axiome I 1—2, II—III, d. h. die sämtlichen ebenen Axiome der ersten drei Axiomgruppen gültig sind, und führen in diese Geometrie unabhängig von den Congruenzaxiomen auf folgende Weise eine neue Streckenrechnung ein.

Wir nehmen in der Ebene zwei feste Geraden an, die sich in dem Punkte O schneiden mögen, und rechnen im Folgenden nur mit solchen Strecken, deren Anfangspunkt O ist und deren Endpunkte auf einer dieser beiden festen Geraden liegen. Auch

den Punkt O allein bezeichnen wir als Strecke und nennen ihn dann die Strecke 0, in Zeichen

$$OO = 0 \quad \text{oder} \quad 0 = OO.$$

Es seien E und E' je ein bestimmter Punkt auf den festen Geraden durch O; dann bezeichnen wir die beiden Strecken OE und OE' als die Strecken 1, in Zeichen:

$$OE = OE' = 1 \quad \text{oder} \quad 1 = OE = OE'.$$

Die Gerade EE' nennen wir kurz die Einheitsgerade. Sind ferner A und A' Punkte auf den Geraden OE bez. OE' und läuft die Verbindungsgerade AA' parallel zu EE', so nennen wir die Strecken OA und OA' einander gleich, in Zeichen:

$$OA = OA' \quad \text{oder} \quad OA' = OA.$$

Um zunächst die Summe der Strecken $a = OA$ und $b = OB$ zu definiren, construire man AA' parallel zur Einheitsgeraden EE' und ziehe sodann durch A' eine Parallele zu OE und durch B eine Parallele zu OE'. Diese beiden Parallelen mögen sich in A'' schneiden. Endlich ziehe man durch A'' zur Einheitsgeraden EE' eine Parallele; dieselbe treffe die festen Geraden OE und

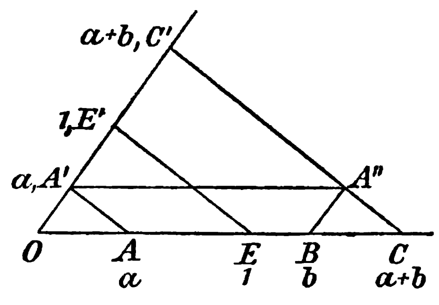


Fig. 39.

OE' in C und C': dann heisse $c = OC = OC'$ die *Summe* der Strecke $a = OA$ mit der Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = a + b \quad \text{oder} \quad a + b = c.$$

Um das Produkt einer Strecke $a = OA$ in eine Strecke $b = OB$ zu definiren, bedienen wir uns genau der in § 15 angegebenen Konstruktion, nur dass an Stelle der Schenkel des rechten Winkels hier die beiden festen Geraden OE und OE' treten. Die Konstruktion ist demnach folgende. Man bestimme auf OE' den Punkt A', sodass AA' parallel der Einheitsgeraden EE' wird, ver-

binde E mit A' und ziehe durch B eine Parallele zu EA'; trifft

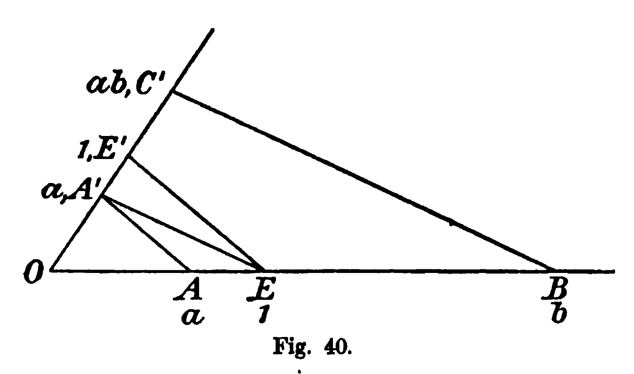


Fig. 40.

diese Parallele die feste Gerade OE' im Punkte C', so heisst $c = OC'$ das Produkt der Strecke $a = OA$ in die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = ab \quad \text{oder} \quad ab = c.$$

§ 25.

Das commutative und associative Gesetz der Addition in der neuen Streckenrechnung.

Wir untersuchen jetzt, welche von den in § 13 aufgestellten Rechnungsgesetzen für unsere neue Streckenrechnung gültig sind, wenn wir eine ebene Geometrie zu Grunde legen, in der die Axiome I 1—2, II—III erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt.

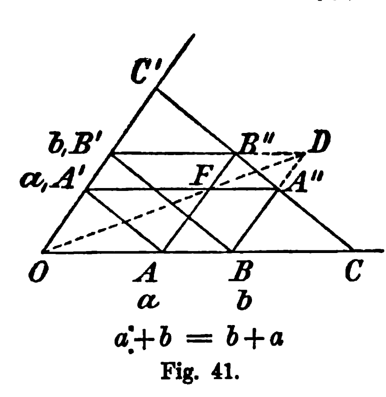
Vor Allem wollen wir beweisen, dass für die in § 24 definirte Addition der Strecken das commutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gilt. Es sei

$$a = OA = OA',$$
$$b = OB = OB',$$

wobei unserer Festsetzung entsprechend AA' und BB' der Einheitsgeraden parallel sind. Nun construiren wir die Punkte A'' und B'', indem wir $A'A''$ sowie $B'B''$ parallel OA und ferner AB'' und BA'' parallel OA' ziehen; wie man sofort sieht, sagt dann unsere Behauptung aus, dass die Verbindungslinie $A''B''$ parallel mit AA' läuft. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen wir auf Grund des Desarguesschen Satzes (Satz 32) wie folgt.



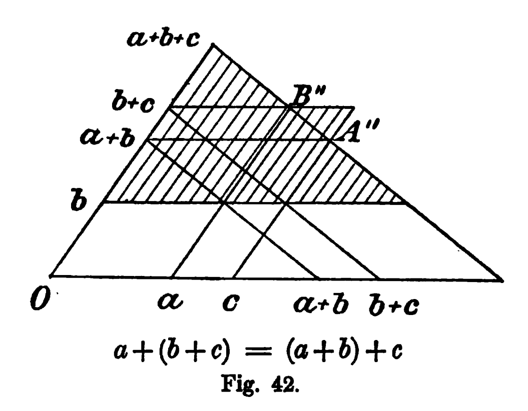
$a+b=b+a$
Fig. 41.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von AB'' und $A'A''$ mit F und den Schnittpunkt von BA'' und $B'B''$ mit D; dann sind in den Dreiecken $AA'F$ und $BB'D$ die entsprechenden Seiten einander parallel. Mittelst des Desarguesschen Satzes schliessen wir hieraus, dass die drei Punkte O, F, D in einer Geraden liegen. In Folge dieses Umstandes liegen die beiden Dreiecke OAA' und $DB''A''$ derart, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt F laufen und da überdies zwei Paare entsprechender Seiten, nämlich OA und DB'' sowie OA' und DA'' einander parallel sind, so laufen nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes (Satz 32) auch die dritten Seiten AA' und $B''A''$ einander parallel.

Zum Beweise des associativen Gesetzes der Addition

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

dient die Figur 42. Mit Berücksichtigung des eben bewiesenen commutativen Gesetzes der Addition spricht sich die obige Behauptung, wie man sieht, darin aus, dass die Gerade $A''B''$ parallel



$a+(b+c)=(a+b)+c$
Fig. 42.

der Einheitsgeraden verlaufen muss. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist offenbar, da der schraffirte Teil der Figur 42 mit der Figur 41 genau übereinstimmt.

§ 26.

Das associative Gesetz der Multiplikation und die beiden distributiven Gesetze in der neuen Streckenrechnung.

Bei unseren Annahmen gilt auch für die Multiplikation der Strecken das associative Gesetz:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Es seien auf der ersteren der beiden festen Geraden durch O die Strecken

$$1 = OA, \quad b = OC, \quad c = OA'$$

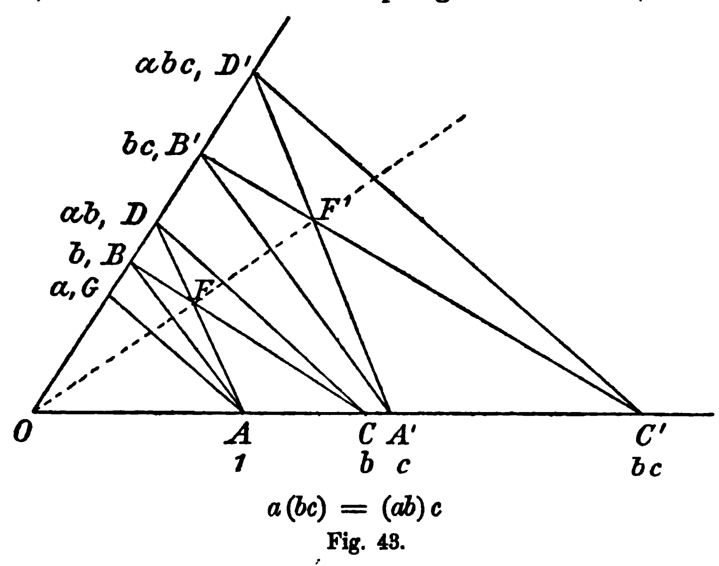
und auf der anderen Geraden die Strecken

$$a = OG \text{ und } b = OB$$

gegeben. Um gemäss der Vorschrift in § 24 der Reihe nach die Strecken

$$bc = OB' \text{ und } bc = OC',$$
$$ab = OD,$$
$$(ab)c = OD'$$

zu construiren, ziehen wir $A'B'$ parallel AB, $B'C'$ parallel BC, CD parallel AG sowie $A'D'$ parallel AD; wie wir sofort erkennen, läuft dann unsere Behauptung darauf hinaus, dass auch



$a(bc) = (ab)c$

Fig. 43.

CD parallel $C'D'$ sein muss. Bezeichnen wir nun den Schnittpunkt der Geraden AD und BC mit F und den Schnittpunkt der

Geraden $A'D'$ und $B'C'$ mit F', so sind in den Dreiecken ABF und $A'B'F'$ die entsprechenden Seiten einander parallel; nach dem Desarguesschen Satze liegen daher die drei Punkte O, F, F' auf einer Geraden. Wegen dieses Umstandes können wir die zweite Aussage des Desarguesschen Satzes auf die beiden Dreiecke CDF und $C'D'F'$ anwenden und erkennen hieraus, dass in der That CD parallel $C'D'$ ist.

Wir beweisen endlich in unserer Streckenrechnung auf Grund des Desarguesschen Satzes die beiden distributiven Gesetze:

$$a(b+c) = ab+ac$$

und

$$(a+b)c = ac+bc.$$

Zum Beweise des ersteren Gesetzes dient die Figur 44[1]). In derselben ist

$$b = OA', \quad c = OC'$$
$$ab = OB', \quad ab = OA'', \quad ac = OC'' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$B''D_2$ parallel $C''D_1$ parallel zur festen Geraden OA',
$B'D_1$ „ $C'D_2$ „ „ „ „ OA'';

ferner ist

$$A'A'' \text{ parallel } C'C''$$

und

$$A'B'' \text{ parallel } B'A'' \text{ parallel } F'D_2 \text{ parallel } F''D_1.$$

Die Behauptung läuft darauf hinaus, dass dann auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A'' \text{ und } C'C''$$

sein muss.

Wir construiren folgende Hülfslinien:

$F''J$ parallel der festen Geraden OA',
$F'J$ „ „ „ „ OA'';

die Schnittpunkte der Geraden $C''D_1$ und $C'D_2$, $C''D_1$ und $F'J$, $C'D_2$ und $F''J$ heissen G, H_1, H_2; endlich erhalten wir noch die weiteren in der Figur 44 punktirten Hülfslinien durch Verbindung bereits construirter Punkte.

In den beiden Dreiecken $A'B''C''$ und $F'D_2G$ laufen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel; nach

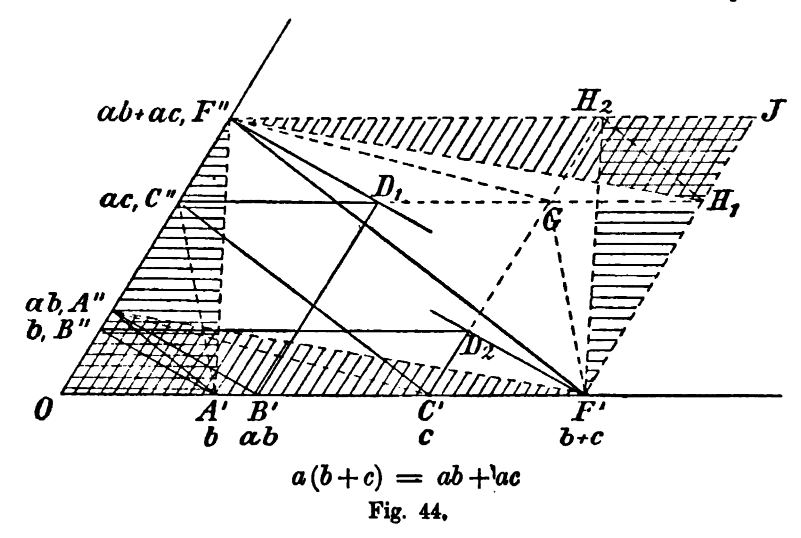
1) Die Figuren 44, 45 und 47 hat Herr Dr. *von Schaper* entworfen und auch die zugehörigen Beweise ausgeführt.



der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt daher, dass

$$A'C'' \text{ parallel } F'G$$

sein muss. In den beiden Dreiecken $A'C''F''$ und $F'GH_2$ laufen



$$a(b+c) = ab + ac$$

Fig. 44.

ebenfalls die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel; wegen der vorhin gefundenen Thatsache folgt nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, dass

$$A'F'' \text{ parallel } F'H_2$$

sein muss. Da somit in den beiden wagerecht schraffirten Dreiecken $OA'F''$ und JH_2F' die entsprechenden Seiten parallel sind, so lehrt der Desarguessche Satz, dass die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A'H_2, \quad F''F'$$

sich in einem und demselben Punkte, etwa in P, treffen.

Auf dieselbe Weise finden wir, dass auch

$$A''F' \text{ parallel } F''H_1$$

sein muss und da somit in den beiden schräg schraffierten Dreiecken $OA''F'$ und JH_1F'' die entsprechenden Seiten parallel laufen, so treffen sich dem Desarguesschen Satze zufolge die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A''H_1, \quad F'F''$$

ebenfalls in einem Punkte — dem Punkte P.

Nunmehr laufen für die Dreiecke $OA'A''$ und JH_2H_1 die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt

P, und mithin folgt, dass

$$H_1 H_2 \text{ parallel } A'A''$$

sein muss; mithin ist auch

$$H_1 H_2 \text{ parallel } C'C''.$$

Endlich betrachten wir die Figur $F''H_2C'C''H_1F'F''$. Da in derselben

$$\begin{array}{lllll} F''H_2 & \text{parallel} & C'F' & \text{parallel} & C''H_1 \\ H_2C' & „ & F''C'' & „ & H_1F' \\ C'C'' & „ & H_1H_2 & & \end{array}$$

ausfällt, so erkennen wir hierin die Figur 41 wieder, die wir in § 25 zum Beweise für das commutative Gesetz der Addition benutzt haben. Die entsprechenden Schlüsse wie dort zeigen dann, dass

$$F'F'' \text{ parallel } H_1H_2$$

sein muss und da mithin auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A''$$

ausfällt, so ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

Zum Beweise der zweiten Formel des distributiven Gesetzes dient die völlig verschiedene Figur 45. In derselben ist

$$1 = OD, \quad a = OA, \quad a = OB, \quad b = OG, \quad c = OD'$$
$$ac = OA', \quad ac = OB', \quad bc = OG' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$$\begin{array}{llllll} GH & \text{parallel} & G'H' & \text{parallel zur festen Geraden} & OA, \\ AH & „ & A'H' & „ \quad „ \quad „ & OB \end{array}$$

und ferner

$$\begin{array}{lll} AB & \text{parallel} & A'B', \\ BD & „ & B'D', \\ DG & „ & D'G', \\ HJ & „ & H'J'. \end{array}$$

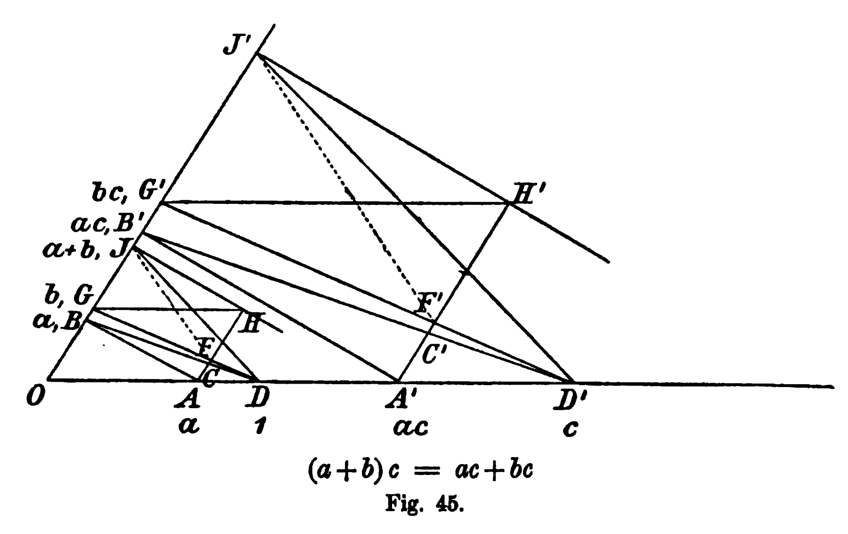
Die Behauptung läuft darauf hinaus, dass dann auch

$$DJ \text{ parallel } D'J'$$

sein muss.

Wir bezeichnen die Punkte, in denen BD und GD die Gerade AH treffen, bez. mit C und F und ferner die Punkte, in denen $B'D'$ und $G'D'$ die Gerade $A'H'$ treffen, bez. mit C' und F';

endlich ziehen wir noch die in der Figur 45 punktirten Hülfslinien FJ und $F'J'$.



$(a+b)c = ac+bc$

Fig. 45.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ laufen die entsprechenden Seiten parallel; mithin liegen nach dem Desarguesschen Satze die drei Punkte O, C, C' auf einer Geraden. Ebenso folgt dann aus der Betrachtung der Dreiecke CDF und $C'D'F'$, dass O, F, F' auf einer Geraden liegen, und die Betrachtung der Dreiecke FGH und $F'G'H'$ lehrt, dass O, H, H' Punkte einer Geraden sind. Nun laufen in den Dreiecken FHJ und $F'H'J'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt O, und mithin sind zufolge der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes die Geraden FJ und $F'J'$ einander parallel. Endlich zeigt dann die Betrachtung der Dreiecke DFJ und $D'F'J'$, dass die Geraden DJ und $D'J'$ einander parallel sind, und damit ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

§ 27.

Die Gleichung der Geraden auf Grund der neuen Streckenrechnung.

Wir haben in § 24 bis § 26 mittelst der in § 24 angeführten Axiome und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene eine Streckenrechnung eingeführt, in welcher das commutative Gesetz der Addition, die associativen Gesetze der Addition und Multiplikation, sowie die beiden distributiven Gesetze gültig sind. Wir wollen in diesem Paragraphen

zeigen, in welcher Weise auf Grund dieser Streckenrechnung eine analytische Darstellung der Punkte und Geraden in der Ebene möglich ist.

Definition. Wir bezeichnen in der Ebene die beiden angenommenen festen Geraden durch den Punkt O als die X- und Y-Axe und denken uns irgend einen Punkt P der Ebene durch die Strecken x, y bestimmt, die man auf der X- bez. Y-Axe erhält, wenn man durch P zu diesen Axen Parallelen zieht. Diese Strecken x, y heissen *Coordinaten* des Punktes P. Auf Grund der neuen Streckenrechnung und mit Hülfe des Desarguesschen Satzes gelangen wir zu der folgenden Thatsache:

Satz 34. *Die Coordinaten x, y der Punkte auf einer beliebigen Geraden erfüllen stets eine Streckengleichung von der Gestalt:*

$$ax + by + c = 0;$$

in dieser Gleichung stehen die Strecken a, b notwendig linksseitig von den Coordinaten x, y; die Strecken a, b sind niemals beide Null und c ist eine beliebige Strecke.

Umgekehrt: jede Streckengleichung der beschriebenen Art stellt stets eine Gerade in der zu Grunde gelegten ebenen Geometrie dar.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Gerade l gehe durch O. Ferner sei C ein bestimmter von O verschiedener Punkt auf l und P ein beliebiger Punkt auf l; C habe die Coordinaten OA, OB und P habe die Coordinaten x, y; wir bezeichnen die Verbindungsgerade der Endpunkte von x, y mit g. Endlich ziehen wir durch

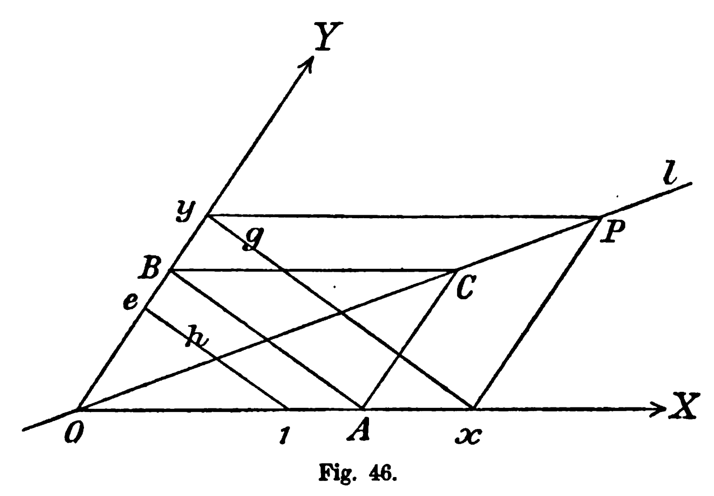


Fig. 46.

den Endpunkt der Strecke 1 auf der X-Axe eine Parallele h zu AB; diese Parallele schneide auf der Y-Axe die Strecke e

ab. Aus der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt leicht, dass die Gerade g stets parallel zu AB läuft. Da somit auch g stets zu h parallel ist, so folgt für die Coordinaten x, y des beliebigen Punktes P auf l die Streckengleichung

$$ex = y.$$

Nunmehr sei l' eine beliebige Gerade in unserer Ebene; dieselbe schneide auf der X-Axe die Strecke $c = OO'$ ab. Wir ziehen ferner die Gerade l durch O parallel zu l'. Es sei P' ein beliebiger Punkt auf l'; die Parallele durch P' zur X-Axe treffe die Gerade l in P und schneide auf der Y-Axe die Strecke $y = OB$ ab; ferner mögen die Parallelen durch P und P' zur Y-Axe auf der X-Axe die Strecken $x = OA$ und $x' = OA'$ abschneiden.

Wir wollen nun beweisen, dass die Streckengleichung

$$x' = x + c$$

besteht. Zu diesem Zwecke ziehen wir $O'C$ parallel zur Einheits-

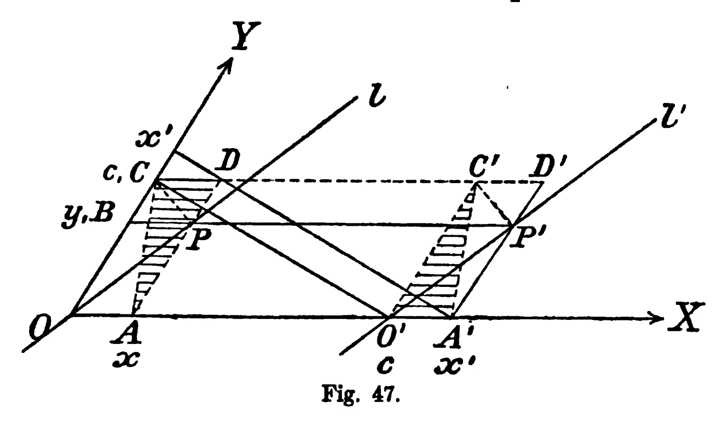


Fig. 47.

geraden, ferner CD parallel zur X-Axe und AD parallel zur Y-Axe; dann läuft unsere Behauptung darauf hinaus, dass

$$A'D \text{ parallel } O'C$$

sein muss. Wir construiren noch D' als Schnittpunkt der Geraden CD und $A'P'$ und ziehen $O'C'$ parallel zur Y-Axe.

Da in den Dreiecken OCP und $O'C'P'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken parallel laufen, so folgt mittelst der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, dass

$$CP \text{ parallel } C'P'$$

sein muss; auf gleiche Weise lehrt die Betrachtung der Dreiecke

ACP und $A'C'P'$, dass

$$AC \text{ parallel } A'C'$$

ist. Da somit in den Dreiecken ACD und $C'A'O'$ die entsprechenden Seiten einander parallel laufen, so treffen sich die Geraden AC', CA', DO' in einem Punkte und die Betrachtung der beiden Dreiecke $C'A'D$ und ACO' zeigt dann, dass $A'D$ und CO' einander parallel sind.

Aus den beiden bisher gefundenen Streckengleichungen

$$ex = y \quad \text{und} \quad x' = x + c$$

folgt sofort die weitere Gleichung

$$ex' = y + ec.$$

Bezeichnen wir schliesslich mit n die Strecke, die zur Strecke 1 addirt die Strecke 0 liefert, so folgt, wie man leicht beweist, aus der letzten Gleichung

$$ex' + ny + nec = 0$$

und diese Gleichung ist von der Gestalt, wie der Satz 34 behauptet.

Die zweite Aussage des Satzes 34 erkennen wir nun ohne Mühe als richtig; denn eine jede vorgelegte Streckengleichung

$$ax + by + c = 0$$

lässt sich offenbar durch linksseitige Multiplikation mit einer geeigneten Strecke in die vorhin gefundene Gestalt

$$ex + ny + nec = 0$$

bringen.

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, dass bei unseren Annahmen eine Streckengleichung von der Gestalt

$$xa + yb + c = 0,$$

in der die Strecken a, b rechtsseitig von den Coordinaten x, y stehen, im Allgemeinen nicht eine Gerade darstellt.

Wir werden in § 30 eine wichtige Anwendung von dem Satze 34 machen.

§ 28.

Der Inbegriff der Strecken aufgefasst als complexes Zahlensystem.

Wir sehen unmittelbar ein, dass für unsere neue in § 24 begründete Streckenrechnung die Sätze 1—6 in § 13 erfüllt sind.



Ferner haben wir in § 25 und § 26 mit Hülfe des Desarguesschen Satzes erkannt, dass für diese Streckenrechnung die Rechnungsgesetze 7—11 in § 13 gültig sind; es bestehen somit sämtliche Sätze der Verknüpfung, abgesehen vom commutativen Gesetze der Multiplikation.

Um endlich eine Anordnung der Strecken zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzung. Es seien A, B irgend zwei verschiedene Punkte der Geraden OE; dann bringen wir gemäss Axiom II 4 die vier Punkte O, E, A, B in eine Reihenfolge. Ist dies auf eine der folgenden sechs Arten

$$ABOE,\ AOBE,\ AOEB,\ OABE,\ OAEB,\ OEAB$$

möglich, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *kleiner* als die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$a < b.$$

Findet dagegen eine der sechs Reihenfolgen

$$BAOE,\ BOAE,\ BOEA,\ OBAE,\ OBEA,\ OEBA$$

statt, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *grösser* als die Strecke $b = OA$, in Zeichen

$$a > b.$$

Diese Festsetzung bleibt auch in Kraft, wenn A oder B mit O oder E zusammenfallen, nur dass dann die zusammenfallenden Punkte als ein einziger Punkt anzusehen sind und somit lediglich die Anordnung dreier Punkte in Frage kommt.

Wir erkennen leicht, dass nunmehr in unserer Streckenrechnung auf Grund der Axiome II die Rechnungsgesetze 13—16 in § 13 erfüllt sind; somit bildet die Gesamtheit aller verschiedenen Strecken ein complexes Zahlensystem, für welches die Gesetze 1—11, 13—16 in § 13, d. h. die sämtlichen Vorschriften ausser dem commutativen Gesetze der Multiplikation und dem Archimedischen Satze gewiss gültig sind; wir bezeichnen ein solches Zahlensystem im Folgenden kurz als ein *Desarguessches Zahlensystem.*

§ 29.

Aufbau einer räumlichen Geometrie mit Hülfe eines Desarguesschen Zahlensystems.

Es sei nun irgend ein Desarguessches Zahlensystem D vorgelegt; dasselbe ermöglicht uns den Aufbau einer räum-

lichen Geometrie, in der die Axiome I, II, III sämtlich erfüllt sind.

Um dies einzusehen, denken wir uns das System von irgend drei Zahlen (x, y, z) des Desarguesschen Zahlensystems D als einen Punkt und das System von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ in D, von denen die ersten drei Zahlen nicht zugleich 0 sind, als eine Ebene; doch sollen die Systeme $(u : v : w : r)$ und $(au : av : aw : ar)$, wo a irgend eine von 0 verschiedene Zahl in D bedeutet, die nämliche Ebene darstellen. Das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

möge ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Die Gerade endlich definiren wir mit Hülfe eines Systems zweier Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und $(u'' : v'' : w'' : r'')$, wenn es nicht möglich ist, zwei von 0 verschiedene Zahlen a', a'' in D zu finden, sodass gleichzeitig

$$a'u' = a''u'', \quad a'v' = a''v'', \quad a'w' = a''w''$$

wird. Ein Punkt (x, y, z) heisst auf dieser Geraden $[(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')]$ gelegen, wenn er den beiden Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und (u'', v'', w'', r'') gemeinsam ist. Zwei Gerade, welche dieselben Punkte enthalten, gelten als nicht verschieden.

Indem wir die Rechnungsgesetze 1—11 in § 13 anwenden, die nach Voraussetzung für die Zahlen in D gelten sollen, gelangen wir ohne Schwierigkeit zu dem Resultate, dass in der soeben aufgestellten räumlichen Geometrie die Axiome I und III sämtlich erfüllt sind.

Damit auch den Axiomen II der Anordnung Genüge geschehe, treffen wir folgende Festsetzungen. Es seien

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

irgend drei Punkte einer Geraden

$$[(u' : v' : w' : r'), \quad (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

dann heisse der Punkt (x_2, y_2, z_2) zwischen den beiden anderen gelegen, wenn wenigstens eine der sechs Doppelungleichungen

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3$$

$$(2) \qquad y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3$$

$$(3) \qquad z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3$$

erfüllt ist. Besteht nun etwa eine der beiden Doppelungleichungen (1), so schliessen wir leicht, dass entweder $y_1 = y_2 = y_3$ oder

notwendig eine der beiden Doppelungleichungen (2) und ebenso dass entweder $z_1 = z_2 = z_3$ oder eine der Doppelungleichungen (3) gelten muss. In der That, aus den Gleichungen

$$\begin{gathered} u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0, \\ u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0, \\ (i = 1, 2, 3) \end{gathered}$$

leiten wir durch linksseitige Multiplikation derselben mit geeigneten Zahlen aus D und durch nachherige Addition der entstehenden Gleichungen ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$\begin{gathered} u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0 \\ (i = 1, 2, 3) \end{gathered} \tag{4}$$

ab. Hierin ist der Coefficient v''' sicher nicht 0, da sonst die Gleichheit der drei Zahlen x_1, x_2, x_3 folgen würde. Aus

$$x_1 \lessgtr x_2 \lessgtr x_3$$

schliessen wir

$$u'''x_1 \lesseqgtr u'''x_2 \lesseqgtr u'''x_3$$

und mithin wegen (4)

$$v'''y_1 + r''' \lesseqgtr v'''y_2 + r''' \lesseqgtr v'''y_3 + r'''$$

und daher

$$v'''y_1 \lesseqgtr v'''y_2 \lesseqgtr v'''y_3,$$

und da v''' nicht 0 ist, so haben wir

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3;$$

in jeder dieser Doppelungleichungen soll stets entweder durchweg das obere oder durchweg das mittlere oder durchweg das untere Zeichen gelten.

Die angestellten Ueberlegungen lassen erkennen, dass in unserer Geometrie die linearen Axiome II 1—4 der Anordnung zutreffen. Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass in unserer Geometrie auch das ebene Axiom II 5 gültig ist.

Zu dem Zwecke sei eine Ebene $(u : v : w : r)$ und in ihr eine Gerade $[(u : v : w : r), (u' : v' : w' : r')]$ gegeben. Wir setzen fest, dass alle in der Ebene $(u : v : w : r)$ gelegenen Punkte (x, y, z), für die der Ausdruck $u'x + v'y + w'z + r'$ kleiner oder grösser als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite von jener Geraden gelegen sein sollen, und haben dann zu beweisen, dass diese Fest-

setzung sich mit der vorigen in Uebereinstimmung befindet, was leicht geschehen kann.

Damit haben wir erkannt, dass die sämtlichen Axiome I, II, III in derjenigen räumlichen Geometrie erfüllt sind, die in der oben geschilderten Weise aus dem Desarguesschen Zahlensystem D entspringt. Bedenken wir, dass der Desarguessche Satz eine Folge der Axiome I, II, III ist, so sehen wir, dass die eben gefundene Thatsache die genaue Umkehrung desjenigen Ergebnisses darstellt, zu dem wir in § 28 gelangt sind.

§ 30.

Die Bedeutung des Desarguesschen Satzes.

Wenn in einer ebenen Geometrie die Axiome I 1—2, II, III erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt, so ist es nach § 24 — § 28 in dieser Geometrie stets möglich, eine Streckenrechnung einzuführen, für die die Regeln 1—11, 13—16 in § 13 anwendbar sind. Wir betrachten nun weiter den Inbegriff dieser Strecken als ein complexes Zahlensystem und bauen aus denselben nach den Entwickelungen in § 29 eine räumliche Geometrie auf, in der sämtliche Axiome I, II, III gültig sind.

Fassen wir in dieser räumlichen Geometrie lediglich die Punkte $(x, y, 0)$ und diejenigen Geraden ins Auge, auf denen nur solche Punkte liegen, so entsteht eine ebene Geometrie, und wenn wir die in § 27 abgeleitete Thatsache berücksichtigen, so leuchtet ein, dass diese ebene Geometrie genau mit der zu Anfang vorgelegten ebenen Geometrie übereinstimmen muss. Damit gewinnen wir folgenden Satz, der als das Endziel der gesamten Entwickelungen dieses Kapitels V anzusehen ist:

Satz 35. *Es seien in einer ebenen Geometrie die Axiome* I 1—2, II, III *erfüllt: dann ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese ebene Geometrie sich auffassen lässt als ein Teil einer räumlichen Geometrie, in welcher die sämtlichen Axiome* I, II, III *erfüllt sind.*

Der Desarguessche Satz kennzeichnet sich so gewissermassen für die ebene Geometrie als das Resultat der Elimination der räumlichen Axiome.

Die gefundenen Resultate setzen uns auch in den Stand zu erkennen, dass jede räumliche Geometrie, in der die Axiome I, II, III sämtlich erfüllt sind, sich stets als ein Teil einer „Geometrie von beliebig vielen Dimensionen“ auffassen lässt; dabei ist

unter einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen eine Gesamtheit von Punkten, Geraden, Ebenen und noch weiteren linearen Elementen zu verstehen, für welche die entsprechenden Axiome der Verknüpfung und Anordnung sowie das Parallelenaxiom erfüllt sind.

Kapitel VI.
Der Pascalsche Satz.

§ 31.
Zwei Sätze über die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes.

Der Desarguessche Satz (Satz 32) lässt sich bekanntlich aus den Axiomen I, II, III, d. h. unter wesentlicher Benutzung der räumlichen Axiome beweisen; in § 23 habe ich gezeigt, dass der Beweis desselben ohne die räumlichen Axiome der Gruppe I und ohne die Congruenzaxiome IV nicht möglich ist, selbst wenn die Benutzung des Archimedischen Axioms gestattet wird.

In § 14 ist der Pascalsche Satz (Satz 21) und damit nach § 22 auch der Desarguessche Satz aus den Axiomen I 1—2, II—IV, also mit Ausschluss der räumlichen Axiome und unter wesentlicher Benutzung der Congruenzaxiome abgeleitet worden. Es entsteht die Frage, ob auch der Pascalsche Satz ohne Hinzuziehung der Congruenzaxiome bewiesen werden kann. Unsere Untersuchung wird zeigen, dass in dieser Hinsicht der Pascalsche Satz sich völlig anders als der Desarguessche Satz verhält, indem bei dem Beweise des Pascalschen Satzes die Zulassung oder Ausschliessung des Archimedischen Axioms von entscheidendem Einflusse für seine Gültigkeit ist. Die wesentlichen Ergebnisse unserer Untersuchung fassen wir in den folgenden zwei Sätzen zusammen:

Satz 36. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, III, V, *d. h. unter Ausschliessung der Congruenzaxiome mit Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms.*

Satz 37. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist nicht beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, III, *d. h. unter Ausschliessung der Congruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms.*

In der Fassung dieser beiden Sätze können nach dem allge-

meinen Satze 35 die räumlichen Axiome I 3—7 auch durch die ebene Forderung ersetzt werden, dass der Desarguessche Satz (Satz 32) gelten soll.

§ 32.

Das commutative Gesetz der Multiplikation im Archimedischen Zahlensystem.

Die Beweise der Sätze 36 und 37 beruhen wesentlich auf gewissen gegenseitigen Beziehungen, welche für die Rechnungsregeln und Grundthatsachen der Arithmetik bestehen und deren Kenntnis auch an sich von Interesse erscheint. Wir stellen die folgenden zwei Sätze auf:

Satz 38. *Für ein Archimedisches Zahlensystem ist das commutative Gesetz der Multiplikation eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze; d. h., wenn ein Zahlensystem die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—17 *besitzt, so folgt notwendig, dass dasselbe auch der Formel* 12 *genügt.*

Beweis. Zunächst bemerken wir: wenn a eine beliebige Zahl des Zahlensystems und

$$n = 1+1+\cdots+1$$

eine ganze rationale positive Zahl ist, so gilt für a und n stets das commutative Gesetz der Multiplikation; es ist nämlich

$$an = a(1+1+\cdots+1) = a\cdot 1+a\cdot 1+\cdots+a\cdot 1 = a+a+\cdots+a$$

und ebenso

$$na = (1+1+\cdots+1)a = 1\cdot a+1\cdot a+\cdots+1\cdot a = a+a+\cdots+a$$

Es seien nun im Gegensatz zu unserer Behauptung a, b solche zwei Zahlen des Zahlensystems, für welche das commutative Gesetz der Multiplikation nicht gültig ist. Wir dürfen dann, wie leicht ersichtlich, die Annahmen

$$a>0, \quad b>0 \qquad ab-ba>0$$

machen. Wegen der Forderung 6 in § 13 giebt es eine Zahl $c\,(>0)$, so dass

$$(a+b+1)\,c = ab-ba$$

ist. Endlich wählen wir eine Zahl d, die zugleich den Ungleichungen

$$d>0, \quad d<1, \quad d<c$$

genügt, und bezeichnen mit m und n zwei solche ganze rationale



Zahlen $\geqq 0$, für die

$$md < a \leqq (m+1)\,d$$

bez.

$$nd < b \leqq (n+1)\,d$$

wird. Das Vorhandensein solcher Zahlen m, n ist eine unmittelbare Folgerung des Archimedischen Satzes (Satz 17 in § 13). Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Anfang dieses Beweises erhalten wir aus den letzteren Ungleichungen durch Multiplikation

$$ab \leqq mnd^2 + (m+n+1)\,d^2,$$
$$ba > mnd^2,$$

also durch Subtraktion

$$ab - ba \leqq (m+n+1)\,d^2.$$

Nun ist

$$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

und folglich

$$(m+n+1)\,d < a+b+1,$$

d. h.

$$ab - ba < (a+b+1)\,d$$

oder wegen $d < c$

$$ab - ba < (a+b+1)\,c.$$

Diese Ungleichung widerspricht der Bestimmung der Zahl c, und damit ist der Beweis für den Satz 38 erbracht.

§ 33.

Das commutative Gesetz der Multiplikation im Nicht-Archimedischen Zahlensystem.

Satz 39. *Für ein Nicht-Archimedisches Zahlensystem ist das commutative Gesetz der Multiplikation* **nicht** *eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze; d. h. es giebt ein Zahlensystem, das die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—16 *besitzt — ein Desarguessches Zahlensystem nach* § 28 —, *in welchem* **nicht** *das commutative Gesetz* (12) *der Multiplikation besteht.*

Beweis. Es sei t ein Parameter und T irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \cdots;$$

darin mögen $r_0 (\neq 0), r_1, r_2, \ldots$ beliebige rationale Zahlen bedeuten und n sei eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Ferner sei s ein anderer Parameter und S irgend ein Ausdruck mit einer

endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \cdots;$$

darin mögen $T_0 (\neq 0)$, T_1, $T_2, \ldots$ beliebige Ausdrücke von der Gestalt T bezeichnen und m sei wiederum eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Die Gesamtheit aller Ausdrücke von der Gestalt S sehen wir als ein complexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ an, in dem wir folgende Rechnungsregeln festsetzen: man rechne mit s und t, wie mit Parametern nach den Regeln 7—11 in § 13, während man an Stelle der Regel 12 stets die Formel

$$ts = -st \tag{1}$$

anwende.

Sind nun S', S'' irgend zwei Ausdrücke von der Gestalt S:

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \cdots,$$
$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \cdots,$$

so kann man offenbar durch Zusammenfügung einen neuen Ausdruck $S' + S''$ bilden, der wiederum von der Gestalt S und zugleich eindeutig bestimmt ist; dieser Ausdruck $S' + S''$ heisst die Summe der durch S', S'' dargestellten Zahlen.

Durch gliedweise Multiplikation der beiden Ausdrücke S', S'' gelangen wir zunächst zu einem Ausdrucke von der Gestalt

$$S'S'' = s^{m'} T'_0 s^{m''} T''_0 + (s^{m'} T'_0 s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+1} T'_1 s^{m''} T''_0)$$
$$+ (s^{m'} T'_0 s^{m''+2} T''_2 + s^{m'+1} T'_1 s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+2} T'_2 s^{m''} T''_0) + \cdots.$$

Dieser Ausdruck wird bei Benutzung der Formel (1) offenbar ein eindeutig bestimmter Ausdruck von der Gestalt S; der letztere heisse das Produkt der durch S' dargestellten Zahl in die durch S'' dargestellte Zahl.

Bei der so festgesetzten Rechnungsweise leuchtet die Gültigkeit der Rechnungsregeln 1—5 in § 13 unmittelbar ein. Auch die Gültigkeit der Vorschrift 6 in § 13 ist nicht schwer einzusehen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es seien etwa

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \cdots$$

und

$$S''' = s^{m'''} T'''_0 + s^{m'''+1} T'''_1 + s^{m'''+2} T'''_2 + \cdots$$

gegebene Ausdrücke von der Gestalt S, und bedenken, dass unseren Festsetzungen entsprechend der erste Coefficient r'_0 aus T'_0 von 0 verschieden sein muss. Indem wir nun die nämlichen Po-

tenzen von s auf beiden Seiten einer Gleichung

$$S' S'' = S''' \tag{2}$$

vergleichen, finden wir in eindeutig bestimmter Weise zunächst eine ganze Zahl m'' als Exponenten und sodann der Reihe nach gewisse Ausdrücke

$$T''_0, T''_1, T''_2, \ldots$$

derart, dass der Ausdruck

$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \cdots$$

bei Benutzung der Formel (1) der Gleichung (2) genügt; hiermit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Um endlich die Anordnung der Zahlen unseres Zahlensystems $\Omega(s, t)$ zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzungen. Eine Zahl des Systems heisse $<$ oder > 0, jenachdem in dem Ausdrucke S, der sie darstellt, der erste Coefficient r_0 von T_0 $<$ oder > 0 ausfällt. Sind irgend zwei Zahlen a und b des complexen Zahlensystems vorgelegt, so heisse $a < b$ bez. $a > b$, jenachdem $a - b < 0$ oder > 0 wird. Es leuchtet unmittelbar ein, dass bei diesen Festsetzungen die Regeln 13—16 in § 13 gültig sind, d. h. $\Omega(s, t)$ ist ein Desarguessches Zahlensystem (vgl. § 28).

Die Vorschrift 12 in § 13 ist, wie Gleichung (1) zeigt, für unser complexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht erfüllt und damit ist die Richtigkeit des Satzes 39 vollständig erkannt.

In Uebereinstimmung mit Satz 38 gilt der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) für das soeben aufgestellte Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht.

Es werde noch hervorgehoben, dass das Zahlensystem $\Omega(s, t)$ — ebenso wie die in § 9 und § 12 benutzten Zahlensysteme Ω und $\Omega(t)$ — nur eine abzählbare Menge von Zahlen enthält.

§ 34.

Beweis der beiden Sätze über den Pascalschen Satz. (Nicht-Pascalsche Geometrie.)

Wenn in einer räumlichen Geometrie die sämtlichen Axiome I, II, III erfüllt sind, so gilt auch der Desarguessche Satz (Satz 32) und mithin ist nach Kapitel V § 24 bis § 26 in dieser Geometrie die Einführung einer Streckenrechnung möglich, für welche die Vorschriften 1—11, 13—16 in § 13 gültig sind. Setzen wir nun das Archimedische Axiom V in unserer Geometrie voraus, so gilt

offenbar für die Streckenrechnung der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) und mithin nach Satz 38 auch das commutative Gesetz der Multiplikation. Da aber die hier in Rede stehende in § 24 (Fig. 40) eingeführte Definition des Streckenproduktes mit der in § 15 (Fig. 21) angewandten Definition übereinstimmt, so bedeutet gemäss der in § 15 ausgeführten Construktion das commutative Gesetz der Multiplikation zweier Strecken auch hier nichts anderes als den Pascalschen Satz. Damit ist die Richtigkeit des Satzes 36 erkannt.

Um den Satz 37 zu beweisen, fassen wir das in § 33 aufgestellte Desarguessche Zahlensystem $\Omega(s, t)$ ins Auge und construiren mit Hülfe desselben auf die in § 29 beschriebene Art eine räumliche Geometrie, in der die sämtlichen Axiome I, II, III erfüllt sind. Trotzdem gilt der Pascalsche Satz in dieser Geometrie nicht, da das commutative Gesetz der Multiplikation in dem Desarguesschen Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht besteht. Die so aufgebaute *„Nicht-Pascalsche“ Geometrie* ist in Uebereinstimmung mit dem vorhin bewiesenen Satz 36 notwendig zugleich auch eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie.*

Es ist offenbar, dass der Pascalsche Satz sich bei unseren Annahmen auch dann nicht beweisen lässt, wenn man die räumliche Geometrie als einen Teil einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen auffasst, in welcher neben den Punkten, Geraden und Ebenen noch weitere lineare Elemente vorhanden sind und für diese ein entsprechendes System von Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, sowie das Parallelenaxiom zu Grunde gelegt wird.

§ 35.

Beweis eines beliebigen Schnittpunktsatzes mittelst des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes.

Ein jeder ebener Schnittpunktsatz hat notwendig diese Form: Man wähle zunächst ein System von Punkten und Geraden willkürlich, bez. mit der Bedingung, dass für gewisse von diesen Punkten und Geraden die vereinigte Lage vorgeschrieben ist; wenn man dann in bekannter Weise Verbindungsgerade und Schnittpunkte construirt, so gelangt man schliesslich zu einem bestimmten System von drei Geraden, von denen der Satz aussagt, dass sie durch den nämlichen Punkt hindurchlaufen.

Es sei nun eine ebene Geometrie vorgelegt, in der sämtliche Axiome I 1—2, II—V gültig sind; nach Kap. III § 17 können wir dann vermittelst eines rechtwinkligen Axenkreuzes jedem Punkte ein Zahlenpaar (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis

von drei Zahlen $(u:v:w)$ entsprechen lassen; hierbei sind x, y, u, v, w jedenfalls reelle Zahlen, von denen u, v nicht beide verschwinden, und die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Geraden

$$ux + vy + w = 0$$

bedeutet eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne. Umgekehrt dürfen wir, falls x, y, u, v, w Zahlen des in § 9 construirten algebraischen Bereiches Ω sind und u, v nicht beide verschwinden, gewiss annehmen, dass das Zahlenpaar (x, y) und das Zahlentripel $(u:v:w)$ einen Punkt bez. eine Gerade in der vorgelegten Geometrie liefert.

Führen wir für alle Punkte und Geraden, die in einem beliebigen ebenen Schnittpunktsatze auftreten, die betreffenden Zahlenpaare und Zahlentripel ein, so wird dieser Schnittpunktsatz aussagen, dass ein bestimmter, von gewissen Parametern $p_1, \ldots, p_r$ rational abhängiger Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ mit reellen Coefficienten stets verschwindet, sobald wir für jene Parameter irgend welche Zahlen des in § 9 betrachteten Bereiches Ω einsetzen. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ auch identisch auf Grund der Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 verschwinden muss.

Da in der vorgelegten Geometrie nach § 22 der Desarguessche Satz gilt, so können wir gewiss auch die in § 24 eingeführte Streckenrechnung benutzen, und wegen der Gültigkeit des Pascalschen Satzes trifft für diese Streckenrechnung auch das commutative Gesetz der Multiplikation zu, sodass in dieser Streckenrechnung sämtliche Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 gültig sind.

Indem wir die Axen des bisher benutzten Axenkreuzes auch als Axen dieser neuen Streckenrechnung gewählt und die Einheitspunkte E und E' geeignet festgesetzt denken, erkennen wir die Uebereinstimmung der neuen Streckenrechnung mit der früheren Coordinatenrechnung.

Um in der neuen Streckenrechnung das identische Verschwinden des Ausdruckes $A(p_1, \ldots, p_r)$ nachzuweisen, genügt die Anwendung des Desarguesschen und Pascalschen Satzes und damit erkennen wir, dass jeder in der vorgelegten Geometrie geltende Schnittpunktsatz durch Konstruktion geeigneter Hülfspunkte und Hülfsgeraden sich stets als eine Kombination des Desarguesschen und Pascalschen Satzes herausstellen muss. Zum Nachweise der Richtigkeit des Schnittpunktsatzes brauchen wir also nicht auf die Congruenzsätze zurückzugreifen.

Kapitel VII.

Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—V.

§ 36.

Die geometrischen Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers.

Es sei eine räumliche Geometrie vorgelegt, in der die sämtlichen Axiome I—V gelten; wir fassen der Einfachheit wegen in diesem Kapitel eine ebene Geometrie ins Auge, die in dieser räumlichen Geometrie enthalten ist, und untersuchen dann die Frage, welche elementaren Konstruktionsaufgaben in einer solchen Geometrie notwendig ausführbar sind.

Auf Grund der Axiome I ist die Ausführung der folgenden Aufgabe stets möglich:

Aufgabe 1. Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, falls die Geraden nicht parallel sind.

Das Axiom III ermöglicht die Ausführung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 2. Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

Auf Grund der Congruenzaxiome IV ist das Abtragen von Strecken und Winkeln möglich, d. h. es lassen sich in der vorgelegten Geometrie folgende Aufgaben lösen:

Aufgabe 3. Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem Punkte aus abzutragen.

Aufgabe 4. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzutragen oder eine Gerade zu konstruiren, die eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Auf Grund der Axiome der Gruppen II und V werden keine neuen Aufgaben lösbar; wir sehen somit, dass unter ausschliesslicher Benutzung der Axiome I—V alle und nur diejenigen Konstruktionsaufgaben lösbar sind, die sich auf die eben genannten Aufgaben 1—4 zurückführen lassen.

Wir fügen den fundamentalen Aufgaben 1—4 noch die folgende hinzu:

Aufgabe 5. Zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Wir erkennen unmittelbar, dass diese Aufgabe 5 auf verschiedene Arten durch die Aufgaben 1—4 gelöst werden kann.

Zur Ausführung der Aufgabe 1 bedürfen wir des Lineals. Ein Instrument, welches zur Ausführung der Aufgabe 3 dient d. h. das Abtragen einer Strecke auf einer gegebenen Geraden ermöglicht, nennen wir einen Streckenübertrager. Wir wollen nunmehr zeigen, dass die Aufgaben 2, 4 und 5 auf die Lösung der Aufgaben 1 und 3 zurückgeführt werden können, und mithin die sämtlichen Aufgaben 1—5 lediglich mittelst Lineals und Streckenübertragers lösbar sind. Wir finden damit folgendes Resultat:

Satz 40. *Diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben, die unter ausschliesslicher Benutzung der Axiome* I—V *lösbar sind, lassen sich notwendig mittelst Lineals und Streckenübertragers ausführen.*

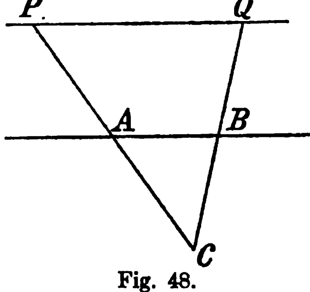


Fig. 48.

Beweis. Um die Aufgabe 2 auf die Aufgaben 1 und 3 zurückzuführen, verbinden wir den gegebenen Punkt P mit irgend einem Punkte A der gegebenen Geraden und verlängern PA über A hinaus um sich selbst bis C. Sodann verbinden wir C mit irgend einem andern Punkte B der gegebenen Geraden und verlängern CB über B hinaus um sich selbst bis Q; die Gerade PQ ist die gesuchte Parallele.

Die Aufgabe 5 lösen wir auf folgende Weise. Es sei A ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden; dann tragen wir von A aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin zwei gleiche Strecken AB und AC ab und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen

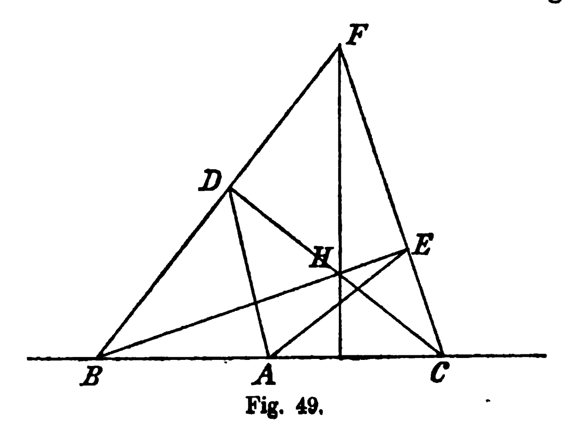


Fig. 49.

durch A gehenden Geraden die Punkte E und D, so dass auch die Strecken AD und AE den Strecken AB und AC gleich werden. Die Geraden BD und CE mögen sich in F, die Geraden BE und CD in H schneiden: dann ist FH die gesuchte Senkrechte. In der That: die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BEC$ sind als Winkel im Halbkreise über BC Rechte und daher steht nach dem Satze vom Höhenschnittpunkt eines Dreieckes, auf das Dreieck BCF angewandt, auch FH auf BC senkrecht.

Wir können nunmehr leicht auch die Aufgabe 4 allein mittelst Ziehens von Geraden und Abtragens von Strecken lösen; wir schlagen etwa folgendes Verfahren ein, welches nur das Ziehen von Parallelen und Fällen von Loten erfordert. Es sei β der abzutragende Winkel und A der Scheitel dieses Winkels. Wir ziehen die Gerade l durch A parallel zu der gegebenen Geraden, an welche der gegebene Winkel β angetragen werden soll. Von einem beliebigen Punkte B eines Schenkels von β fällen wir Lote auf den anderen Schenkel des Winkels β und auf l. Die Fusspunkte dieser Lote seien D und C. Das Fällen von Loten geschieht vermöge der Aufgaben 2 und 5.

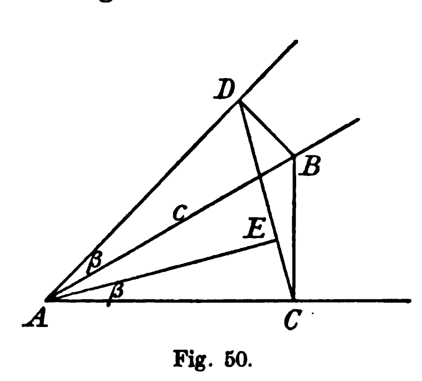


Fig. 50.

Sodann fällen wir von A eine Senkrechte auf CD, ihr Fusspunkt sei E. Nach dem in § 14 ausgeführten Beweise ist $\sphericalangle CAE = \beta$; die Aufgabe 4 ist somit ebenfalls auf die Aufgaben 1 und 3 zurückgeführt und damit der Satz 40 vollständig bewiesen.

§ 37.

Analytische Darstellung der Coordinaten konstruirbarer Punkte.

Ausser den in § 36 behandelten elementargeometrischen Aufgaben giebt es noch eine grosse Reihe weiterer Aufgaben, zu deren Lösung man lediglich das Ziehen von Geraden und das Abtragen von Strecken nötig hat. Um den Bereich aller auf diese Weise lösbaren Aufgaben überblicken zu können, legen wir bei der weiteren Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und denken uns die Coordinaten der Punkte in der üblichen Weise als reelle Zahlen oder Funktionen von gewissen

willkürlichen Parametern. Um die Frage nach der Gesamtheit aller konstruirbaren Punkte zu beantworten, stellen wir folgende Betrachtung an:

Es sei ein System von bestimmten Punkten gegeben; wir setzen aus den Coordinaten dieser Punkte einen Bereich R zusammen; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und gewisse willkürliche Parameter p. Nunmehr denken wir uns die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, die durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken aus dem vorgelegten System von Punkten konstruirbar sind. Der Bereich, der von den Coordinaten dieser Punkte gebildet wird, heisse $\Omega(R)$; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und Funktionen der willkürlichen Parameter p.

Unsere Betrachtungen in § 17 zeigen, dass das Ziehen von Geraden und Parallelen analytisch auf die Anwendung der Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division von Strecken hinausläuft; ferner lehrt die bekannte in § 9 aufgestellte Formel für die Drehung, dass das Abtragen von Strecken auf einer beliebigen Geraden keine andere analytische Operation erfordert, als die Quadratwurzel zu ziehen aus einer Summe von zwei Quadraten, deren Basen man bereits konstruirt hat. Umgekehrt kann man zufolge des Pythagoräischen Lehrsatzes vermöge eines rechtwinkligen Dreiecks die Quadratwurzel aus der Summe zweier Streckenquadrate durch Abtragen von Strecken stets konstruiren.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass der Bereich $\Omega(R)$ alle diejenigen und nur solche reellen Zahlen und Funktionen der Parameter p enthält, die aus den Zahlen und Parametern in R vermöge einer endlichen Anzahl von Anwendungen von fünf Rechnungsoperationen, nämlich der vier elementaren Rechnungsoperationen hervorgehen, wenn man noch das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe zweier Quadrate als fünfte Rechnungsoperation zulässt. Wir sprechen dieses Resultat wie folgt aus:

Satz 41. Eine geometrische Konstruktionsaufgabe ist dann und nur dann durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken, d. h. mittels Lineals und Streckenübertragers lösbar, wenn bei der analytischen Behandlung der Aufgabe die Coordinaten der gesuchten Punkte solche Funktionen der Coordinaten der gegebenen Punkte sind, deren Herstellung nur rationale Operationen und die Operation des Ziehens der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate erfordert.

Wir können aus diesem Satze sofort erkennen, dass nicht jede mittelst Zirkels lösbare Aufgabe auch allein mittelst Lineals und Streckenübertragers gelöst werden kann. Zu dem Zwecke

legen wir diejenige Geometrie zu Grunde, die in § 9 mit Hilfe des algebraischen Zahlenbereichs Ω aufgebaut worden ist; in dieser Geometrie giebt es lediglich solche Strecken, die mittelst Lineals und Streckenübertragers konstruirbar sind, nämlich die durch Zahlen des Bereichs Ω bestimmten Strecken.

Ist nun ω irgend eine Zahl in Ω, so erkennen wir aus der Definition des Bereichs Ω leicht, dass auch jede zu ω conjugirte algebraische Zahl in Ω liegen muss, und da die Zahlen des Bereichs Ω offenbar sämtlich reell sind, so folgt hieraus, dass der Bereich Ω nur solche reelle algebraische Zahlen enthalten kann, deren Conjugirte ebenfalls reell sind.

Wir stellen jetzt die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und einer Kathete $|\sqrt{2}|-1$ zu konstruiren. Nun kommt die algebraische Zahl $\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$, die den Zahlenwert der anderen Kathete ausdrückt, im Zahlenbereich Ω nicht vor, da die zu ihr konjugirte Zahl $\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}$ imaginär ausfällt. Die gestellte Aufgabe ist mithin in der zu Grunde gelegten Geometrie nicht lösbar, und kann daher überhaupt nicht mittelst Lineals und Streckenübertragers lösbar sein, obwohl die Konstruktion mittelst des Zirkels sofort ausführbar ist.

§ 38.

Die Darstellung algebraischer Zahlen und ganzer rationaler Funktionen als Summe von Quadraten.

Die Frage nach der Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers erfordert zu ihrer weiteren Behandlung einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters, die, wie mir scheint, auch an sich von Interesse sind.

Nach *Fermat* ist bekanntlich jede ganze rationale positive Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Dieser Fermatsche Satz gestattet eine merkwürdige Verallgemeinerung von folgender Art:

Definition. Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heisse m, und die $m-1$ zu k konjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Trifft es sich, dass unter den m Körpern $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ einer oder mehrere aus lauter reellen Zahlen gebildet sind, so nennen wir diese

Körper selbst reell; es seien diese Körper etwa $k, k', \ldots k^{(s-1)}$. Eine Zahl α des Körpers k heisst in diesem Falle *total positiv in* k, falls die s zu α konjugirten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Kommen dagegen in jedem der m Körper $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ auch imaginäre Zahlen vor, so heisst eine jede Zahl α in k stets *total positiv*.

Satz 42. *Jede total positive Zahl in k lässt sich als Summe von vier Quadraten darstellen, deren Basen ganze oder gebrochene Zahlen des Körpers k sind.*

Der Beweis dieses Satzes bietet erhebliche Schwierigkeiten dar; er beruht wesentlich auf der Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, die ich unlängst in mehreren Arbeiten [1]) entwickelt habe. Es sei hier nur auf denjenigen Satz aus dieser Theorie hingewiesen, der die Bedingungen für die Lösbarkeit einer ternären Diophantischen Gleichung von der Gestalt

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 = 0$$

angiebt, worin die Coefficienten α, β, γ gegebene Zahlen in k und ξ, η, ζ gesuchte Zahlen in k bedeuten. Der Beweis des Satzes 42 wird durch wiederholte Anwendung des eben genannten Satzes erbracht.

Aus dem Satze 42 folgen eine Reihe von Sätzen über die Darstellung solcher rationaler Funktionen einer Veränderlichen mit rationalen Coefficienten, die niemals negative Werte haben; ich hebe nur den folgenden Satz hervor, der uns im nächsten Paragraphen von Nutzen sein wird.

Satz 43. Es bedeute $f(x)$ eine solche ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlencoefficienten, die niemals negative Werte annimmt, wenn man für x beliebige reelle Werte einsetzt: dann lässt sich $f(x)$ stets als Quotient zweier Summen von Quadraten darstellen, so dass die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Coefficienten sind.

Beweis. Den Grad der vorgelegten Funktion $f(x)$ wollen wir mit m bezeichnen; offenbar muss derselbe jedenfalls gerade sein. Für den Fall $m = 0$, d. h. wenn $f(x)$ eine rationale Zahl ist, folgt die Richtigkeit des Satzes 43 unmittelbar aus dem Fermatschen Satze von der Darstellung einer positiven Zahl als Summe von vier Quadratzahlen. Wir nehmen nun an, der Satz sei

1) Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung Bd. 6, 1899 und Math. Ann. Bd. 51; ferner: Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.



bereits für die Funktionen vom Grade $2, 4, 6, \ldots, m-2$ bewiesen, und zeigen dann seine Richtigkeit für den vorliegenden Fall einer Funktion m^{ten} Grades auf folgende Weise.

Zunächst behandeln wir kurz die Annahme, dass $f(x)$ in das Produkt von zwei oder mehreren ganzen Funktionen von x mit rationalen Coefficienten zerfällt. Ist $p(x)$ eine solche in $f(x)$ aufgehende Funktion, die selbst nicht mehr in ein Produkt von ganzen Funktionen mit rationalen Coefficienten zerlegt werden kann, so folgt aus dem vorausgesetzten definiten Charakter der Funktion $f(x)$ leicht, dass der Faktor $p(x)$ entweder in $f(x)$ zu einer geraden Potenz erhoben vorkommen muss oder dass $p(x)$ selbst definit, d. h. eine solche Funktion ist, die für reelle Werthe von x niemals negativ ausfällt. Im ersteren Falle ist der Quotient $\frac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$, im letzteren Falle sind sowohl $p(x)$ als auch $\frac{f(x)}{p(x)}$ wiederum definite Funktionen und diese Funktionen besitzen einen geraden Grad $< m$. Zufolge unserer Annahme sind daher im ersteren Falle $\frac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$, im letzteren Falle sowohl $p(x)$ wie auch $\frac{f(x)}{p(x)}$ als Quotienten von Quadratsummen von der im Satze 43 angegebenen Art darstellbar, und daher gestattet notwendig in beiden Fällen auch die Funktion $f(x)$ die verlangte Darstellung.

Wir behandeln nunmehr die Annahme, dass $f(x)$ nicht in das Produkt von zwei ganzen Funktionen mit rationalen Coefficienten zerlegt werden kann. Die Gleichung $f(\vartheta) = 0$ definirt dann einen algebraischen Zahlkörper $k(\vartheta)$ vom m-ten Grade, der nebst seinen sämtlichen conjugirten Körpern imaginär ausfällt. Da somit nach der Definition, die wir dem Satze 42 vorangestellt haben, jede in $k(\vartheta)$ gelegene Zahl, also auch insbesondere die Zahl -1 total positiv in $k(\vartheta)$ ist, so giebt es nach diesem Satz 42 eine Darstellung der Zahl -1 als Summe von 4 Quadraten gewisser Zahlen in $k(\vartheta)$; es sei

$$-1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2, \tag{1}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze oder gebrochene Zahlen in $k(\vartheta)$ sind. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1 \vartheta^{m-1} + a_2 \vartheta^{m-2} + \cdots + a_m = \varphi(\vartheta),\\
\beta &= b_1 \vartheta^{m-1} + b_2 \vartheta^{m-2} + \cdots + b_m = \psi(\vartheta),\\
\gamma &= c_1 \vartheta^{m-1} + c_2 \vartheta^{m-2} + \cdots + c_m = \chi(\vartheta),\\
\delta &= d_1 \vartheta^{m-1} + d_2 \vartheta^{m-2} + \cdots + d_m = \varrho(\vartheta);
\end{aligned}$$

hierin bedeuten $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_m$ rationale Zahlencoefficienten und $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$, $\chi(\vartheta)$, $\varrho(\vartheta)$ die betreffenden ganzen rationalen Funktionen vom $(m-1)$-ten Grade in ϑ.

Wegen (1) ist

$$1+\{\varphi(\vartheta)\}^2+\{\psi(\vartheta)\}^2+\{\chi(\vartheta)\}^2+\{\varrho(\vartheta)\}^2 = 0,$$

und mit Rücksicht auf die Irreducibilität der Gleichung $f(x) = 0$ stellt daher der Ausdruck

$$F(x) = 1+\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2+\{\chi(x)\}^2+\{\varrho(x)\}^2$$

notwendig eine solche ganze rationale Funktion von x dar, die durch $f(x)$ teilbar ist. $F(x)$ ist offenbar eine definite Funktion vom $(2m-2)$-ten oder von niederem Grade und daher wird der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ eine definite Funktion vom $(m-2)$-ten oder von niederem Grade in x mit rationalen Coefficienten. Infolgedessen lässt sich im Hinblick auf unsere Annahme $\frac{F(x)}{f(x)}$ als Quotient zweier Summen von Quadraten von der im Satze 43 angegebenen Art darstellen, und da $F(x)$ selbst eine solche Summe von Quadraten ist, so folgt, dass auch $f(x)$ ein Quotient zweier Summen von Quadraten von der im Satze 43 angegebenen Art sein muss. Damit ist der Beweis des Satzes 43 vollständig erbracht.

Es dürfte sehr schwierig sein, die entsprechenden Thatsachen für ganze rationale Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen aufzustellen und zu beweisen, doch sei hier darauf hingewiesen, dass die Darstellbarkeit einer beliebigen definiten ganzen rationalen Funktion zweier Veränderlicher als Quotient von Quadratsummen ganzer Funktionen auf einem völlig anderen Wege von mir bewiesen worden ist — unter der Voraussetzung, dass für die darstellenden Funktionen nicht blos rationale, sondern beliebige reelle Coefficienten zulässig sind[1]).

§ 39.

Kriterium für die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers.

Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt, die mittelst des Zirkels ausführbar ist; wir wollen dann ein Kriterium aufzustellen versuchen, welches unmittelbar aus der analy-

1) Ueber ternäre definite Formen, Acta Mathematica Bd. 17.

tischen Natur der Aufgabe und ihrer Lösungen beurteilen lässt, ob die Konstruktion auch allein mittelst Lineals und Streckenübertragers ausführbar ist. Wir werden bei dieser Untersuchung auf den folgenden Satz geführt:

Satz 44. *Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt von der Art, dass man bei analytischer Behandlung derselben die Coordinaten der gesuchten Punkte aus den Coordinaten der gegebenen Punkte lediglich durch rationale Operationen und durch Ziehen von Quadratwurzeln finden kann; es sei n die kleinste Anzahl der Quadratwurzeln, die hierbei zur Berechnung der Coordinaten der Punkte ausreichen: soll dann die vorgelegte Konstruktionsaufgabe sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen lassen, so ist dafür notwendig und hinreichend, dass die geometrische Aufgabe genau 2^n reelle Lösungen besitzt und zwar für alle Lagen der gegebenen Punkte, d. h. für alle Werte der in den Coordinaten der gegebenen Punkte auftretenden willkürlichen Parameter.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz 44 ausschliesslich für den Fall, dass die Coordinaten der gegebenen Punkte rationale Funktionen eines Parameters p mit rationalen Coefficienten sind.

Die Notwendigkeit des aufgestellten Kriteriums leuchtet ein. Um zu zeigen, dass dasselbe auch hinreicht, setzen wir dieses Kriterium als erfüllt voraus und betrachten zunächst eine solche von jenen n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte zuerst zu ziehen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_1(p)$ des Parameters p mit rationalen Coefficienten; diese rationale Funktion darf für beliebige reelle Parameterwerte p niemals negative Werte annehmen, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe für gewisse Werte p imaginäre Lösungen haben müsste. Aus Satz 43 schliessen wir daher, dass $f_1(p)$ als Quotient von Summen von Quadraten ganzer rationaler Funktionen darstellbar ist.

Nunmehr zeigen die Formeln

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+d^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dass allgemein das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe von beliebig vielen Quadraten sich stets zurückführen lässt auf

wiederholtes Ziehen der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate.

Nehmen wir diese Bemerkung mit dem vorigen Ergebnisse zusammen, so erkennen wir, dass der Ausdruck $\sqrt{f_1(p)}$ gewiss mittelst Lineals und Streckenübertragers construirt werden kann.

Wir betrachten ferner eine solche von den n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte **an zweiter Stelle** zu ziehen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_2(p, \sqrt{f_1})$ des Parameters p und der zuerst betrachteten Quadratwurzel; auch diese Funktion f_2 ist bei beliebigen reellen Parameterwerten p und für jedes Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ niemals negativer Werte fähig, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe unter ihren 2^n Lösungen für gewisse Werte p auch imaginäre Lösungen haben müsste. Aus diesem Umstande folgt, dass f_2 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_2^2 - \varphi_1(p) f_2 + \psi_1(p) = 0$$

genügen muss, worin $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ notwendig solche rationale Funktionen von p mit rationalen Coefficienten sind, die für reelle Werte von p niemals negative Werte besitzen. Aus der letzteren quadratischen Gleichung entnehmen wir

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi_1(p)}{\varphi_1(p)}.$$

Nun müssen wiederum nach Satz 43 die Funktionen $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ Quotienten von Summen von Quadraten rationaler Funktionen sein und andererseits ist nach dem Vorigen der Ausdruck f_2 mittelst Lineals und Streckenübertragers construirbar; der gefundene Ausdruck für f_2 zeigt somit, dass f_2 ein Quotient von Summen von Quadraten construirbarer Funktionen ist. Also lässt sich auch der Ausdruck $\sqrt{f_2}$ mittelst Lineals und Streckenübertragers construiren.

Ebenso wie der Ausdruck f_2 erweist sich auch jede andere rationale Funktion $\varphi_2(p, \sqrt{f_1})$ von p und $\sqrt{f_1}$ als Quotient zweier Summen von Quadraten construirbarer Funktionen, sobald diese rationale Funktion φ_2 die Eigenschaft besitzt, niemals negative Werte anzunehmen bei reellem Parameter p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$.

Diese Bemerkung gestattet uns, das eben begonnene Schlussverfahren in folgender Weise fortzusetzen.

Es sei $f_3(p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2})$ ein solcher Ausdruck, der von den drei

Argumenten p, $\sqrt{f_1}$, $\sqrt{f_2}$ in rationaler Weise abhängt und aus dem bei der analytischen Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte an dritter Stelle die Quadratwurzel zu ziehen ist. Wie vorhin schliessen wir, dass f_3 bei beliebigen reellen Werten p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ und $\sqrt{f_2}$ niemals negative Werte annehmen darf; dieser Umstand wiederum zeigt, dass f_2 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_2^2 - \varphi_2(p, \sqrt{f_1}) f_2 + \psi_2(p, \sqrt{f_1}) = 0$$

genügen muss, worin φ_2 und ψ_2 solche rationale Funktionen von p und $\sqrt{f_1}$ bedeuten, die für reelle Werte p und beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ negativer Werte nicht fähig sind. Da mithin φ_2 und ψ_2 nach der vorigen Bemerkung Quotienten zweier Summen von Quadraten construirbarer Ausdrücke sind, so folgt das gleiche auch für den Ausdruck

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi_2(p, \sqrt{f_1})}{\varphi_2(p, \sqrt{f_1})}$$

und mithin ist auch $\sqrt{f_2}$ mittelst Lineals und Streckenübertragers construirbar.

Die Fortsetzung dieser Schlussweise führt zum Beweise des Satzes 44 in dem betrachteten Falle eines Parameters p.

Die allgemeine Richtigkeit des Satzes 44 hängt davon ab, ob der Satz 43 in entsprechender Weise sich auf den Fall mehrerer Veränderlicher verallgemeinern lässt.

Als Beispiel für die Anwendung des Satzes 44 mögen die regulären mittelst Zirkels construirbaren Polygone dienen; in diesem Falle kommt ein willkürlicher Parameter p nicht vor, sondern die zu construirenden Ausdrücke stellen sämtlich algebraische Zahlen dar. Man sieht leicht, dass das Kriterium des Satzes 44 erfüllt ist, und somit ergiebt sich, dass man jene regulären Polygone auch allein mittelst Ziehens von Geraden und Abtragens von Strecken construiren kann — ein Resultat, welches sich auch aus der Theorie der Kreisteilung direkt entnehmen lässt.

Was weitere aus der Elementargeometrie bekannte Konstruktionsaufgaben anbetrifft, so sei hier nur erwähnt, dass das Malfattische Problem, nicht aber die Apollonische Berührungsaufgabe allein mittelst Lineals und Streckenübertragers gelöst werden kann.

Schlusswort.

Die vorstehende Abhandlung ist eine kritische Untersuchung der Principien der Geometrie; in dieser Untersuchung leitete uns der Grundsatz, eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, dass wir zugleich prüften, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist. Dieser Grundsatz scheint mir eine allgemeine und naturgemässe Vorschrift zu enthalten; in der That wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Misslingens von uns klar erkannt worden ist.

So spielt denn in der neueren Mathematik die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen oder Aufgaben eine hervorragende Rolle und das Bestreben, eine Frage solcher Art zu beantworten, war oftmals der Anlass zur Entdeckung neuer und fruchtbarer Forschungsgebiete. Wir erinnern nur an *Abel*'s Beweis für die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch Wurzelziehen, ferner an die Erkenntnis der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und an *Hermite*'s und *Lindemann*'s Sätze von der Unmöglichkeit, die Zahlen e und π auf algebraischem Wege zu construiren.

Der Grundsatz, demzufolge man überall die Principien der Möglichkeit der Beweise erörtern soll, hängt auch aufs Engste mit der Forderung der „Reinheit“ der Beweismethoden zusammen, die von mehreren Mathematikern der neueren Zeit mit Nachdruck erhoben worden ist. Diese Forderung ist im Grunde nichts Anderes als eine subjektive Fassung des hier befolgten Grundsatzes. In der That sucht die vorstehende geometrische Untersuchung allgemein darüber Aufschluss zu geben, welche Axiome, Voraussetzungen oder Hilfsmittel zum Beweise einer elementar-geo-

metrischen Wahrheit nötig sind, und es bleibt dann dem jedesmaligen Ermessen anheim gestellt, welche Beweismethode von dem gerade eingenommenen Standpunkte aus zu bevorzugen ist.

Bei der Anfertigung der Figuren sowie bei der Durchsicht der Correcturbogen habe ich mich der Hülfe des Herrn Dr. *Hans von Schaper* erfreut; ich spreche ihm hierfür meinen Dank aus. Desgleichen danke ich meinem Freunde *Hermann Minkowski* und Herrn Dr. *Julius Sommer* für ihre Unterstützung beim Lesen der Correctur.

Inhalt.

Seite

Einleitung 3

Kapitel I. Die fünf Axiomgruppen.

§ 1. Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen 4
§ 2. Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung 5
§ 3. Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung 6
§ 4. Folgerungen aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung . 7
§ 5. Die Axiomgruppe III: Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom). . 9
§ 6. Die Axiomgruppe IV: Axiome der Congruenz 10
§ 7. Folgerungen aus den Axiomen der Congruenz 12
§ 8. Die Axiomgruppe V: Axiom der Stetigkeit (Archimedisches Axiom) . 19

Kapitel II. Die Widerspruchslosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

§ 9. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome 19
§ 10. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (Nicht-Euklidische Geometrie) 21
§ 11. Die Unabhängigkeit der Congruenzaxiome 23
§ 12. Die Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms V (Nicht-Archimedische Geometrie) 24

Kapitel III. Die Lehre von den Proportionen.

§ 13. Complexe Zahlensysteme 26
§ 14. Beweis des Pascalschen Satzes 28
§ 15. Die Streckenrechnung auf Grund des Pascalschen Satzes 32
§ 16. Die Proportionen und die Aehnlichkeitssätze 35
§ 17. Die Gleichungen der Geraden und Ebenen 37

Kapitel IV. Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18. Die Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen 40
§ 19. Parallelogramme und Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe . . 41
§ 20. Das Flächenmass von Dreiecken und Polygonen 43
§ 21. Die Inhaltsgleichheit und das Flächenmass 46

Kapitel V. Der Desarguessche Satz.

§ 22. Der Desarguessche Satz und der Beweis desselben in der Ebene mit Hülfe der Congruenzaxiome 49
§ 23. Die Nichtbeweisbarkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene ohne Hülfe der Congruenzaxiome 51
§ 24. Einführung einer Streckenrechnung ohne Hülfe der Congruenzaxiome auf Grund des Desarguesschen Satzes 55

Seite

§ 25. Das commutative und associative Gesetz der Addition in der neuen Streckenrechnung 57
§ 26. Das associative Gesetz der Multiplikation und die beiden distributiven Gesetze in der neuen Streckenrechnung 59
§ 27. Die Gleichung der Geraden auf Grund der neuen Streckenrechnung . 63
§ 28. Der Inbegriff der Strecken aufgefasst als complexes Zahlensystem . . 66
§ 29. Aufbau einer räumlichen Geometrie mit Hülfe eines Desarguesschen Zahlensystems 67
§ 30. Die Bedeutung des Desarguesschen Satzes 70

Kapitel VI. Der Pascalsche Satz.

§ 31. Zwei Sätze über die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes 71
§ 32. Das commutative Gesetz der Multiplikation im Archimedischen Zahlensystem 72
§ 33. Das commutative Gesetz der Multiplikation im Nicht-Archimedischen Zahlensystem 73
§ 34. Beweis der beiden Sätze über den Pascalschen Satz (Nicht-Pascalsche Geometrie) 75
§ 35. Beweis eines beliebigen Schnittpunktsatzes mittelst des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes 76

Kapitel VII. Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—V.

§ 36. Die geometrischen Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers 78
§ 37. Analytische Darstellung der Coordinaten konstruirbarer Punkte . . . 80
§ 38. Die Darstellung algebraischer Zahlen und ganzer rationaler Funktionen als Summe von Quadraten 82
§ 39. Kriterium für die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers 85

Schlusswort 89